Mecánica de los Sólidos – Unidad 1A

Principios fundamentales y Diagramas de Esfuerzos

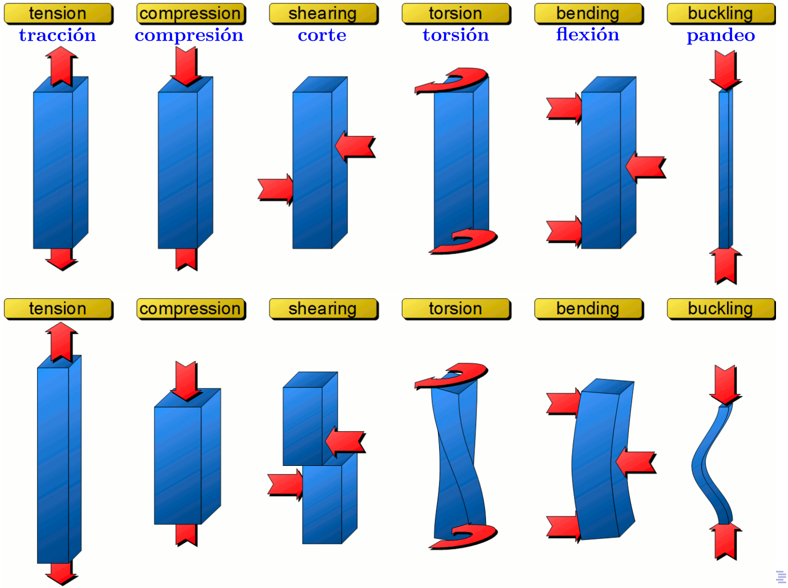
Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

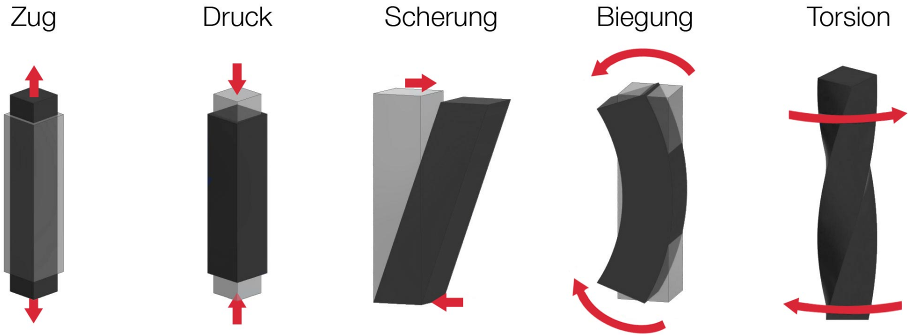
San Rafael–Argentina, agosto de 2021

Contenido

Tipos de carga



Belastungsarten



Mecánica de sólidos [wiki, google, web, etc]

- La Mecánica, que proviene de la palabra *mechanica* en latín que significa arte de construir una máquina, es la rama de la física que estudia y analiza el movimiento y reposo de los cuerpos, y su evolución en el tiempo, bajo la acción de fuerzas.
- Las hipótesis básicas de la Mecánica de sólidos se enumeran a continuación:
    1. El sólido es un medio continuo.
    2. Se consideran las ecuaciones de la Mecánica de Newton.
    3. Se cumplen las leyes básicas de la Termodinámica (conservación de la energía y producción de entropía).

Mecánica de sólidos

- La **primer** hipótesis:
  - Implica que el sólido no tiene discontinuidades a nivel microscópico como consecuencia de la distribución molecular de cada material.
  - Es decir, se ignora la existencia de estructuras a nivel microscópico (moleculares, atómicas, cristalinas o granulares), considerando que el comportamiento a nivel macroscópico es independiente de tal estructura (salvo a través de relaciones experimentales que se traducen en la relación de comportamiento).
  - Esta hipótesis se justifica por las pequeñas dimensiones de los constituyentes microscópicos (moléculas, cristales o granos) en comparación con las dimensiones significativas del sólido (distribución de los apoyos o de las cargas y dimensiones propias del sólido) y permite trabajar con un espacio continuo y utilizar las herramientas que proporciona el análisis diferencial.

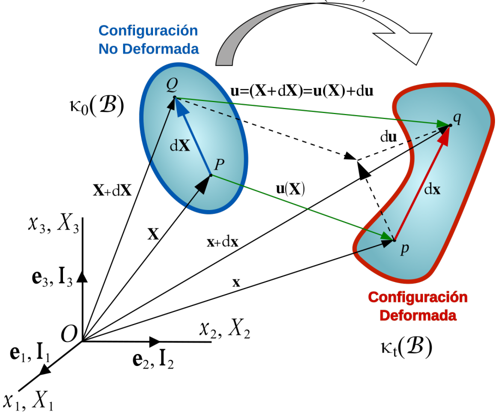
- La mecánica de sólidos es el estudio de cuerpos formados por partículas, que se imponen restricciones de movimiento las unas a las otras.
- La mecánica de sólidos es un tema muy amplio debido a la amplia gama de materiales sólidos disponibles, como acero, madera, hormigón, materiales biológicos, textiles, materiales geológicos y plásticos.
- Comprende dos tipos de problemas muy diferentes:
    - La mecánica del sólido rígido.
    - La mecánica de sólidos deformables.

- **La mecánica del sólido rígido.**
  - Es aquella que estudia el movimiento y equilibrio de materiales sólidos, ignorando sus deformaciones.
  - Se entiende por sólido rígido un conjunto de puntos del espacio que se mueven de tal manera que no se alteran las distancias entre ellos, sea cual sea la fuerza actuante (el movimiento de un sólido rígido viene dado por un grupo uniparamétrico de isometrías).
  - Es decir, consiste en un modelo matemático útil para estudiar una parte de la mecánica de sólidos, ya que todos **los sólidos reales son deformables**.
- **La mecánica de sólidos deformables.**
  - Es aquella rama que estudia el comportamiento de los cuerpos sólidos deformables ante diferentes tipos de situaciones, como la aplicación de cargas, gradientes térmicos, cambios de fase, etc.
  - Estos comportamientos, más complejos que el de los sólidos rígidos, se estudian en mecánica de sólidos deformables introduciendo los conceptos de deformación y de tensión [**este curso**].

- Mecánica del sólido rígido vs sólido deformable [Ver video Aula PUVC].

$$\mathbf{F} = \nabla \chi(\mathbf{X}, t)$$
$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$$

- La mecánica de sólidos deformables emplea modelos que utilizan extensivamente los tensores para describir tensiones, deformaciones y la relación entre ellas.



- Dichos modelos consideran una distribución continua de la materia, así como la variación, también continua, de las distancias entre cualesquiera de los puntos que lo constituyen.

- La mecánica de sólidos deformables se encarga de determinar a partir de una cierta geometría original de sólido y unas fuerzas aplicadas sobre el mismo, si el cuerpo cumple ciertos requisitos de resistencia y rigidez.
- Para establecer las ecuaciones generales que gobiernan el comportamiento mecánico de los sólidos deformables, es necesario complementar las ecuaciones de la estática, cinemática y dinámica con ecuaciones que relacionen las modificaciones de forma del sólido con las fuerzas que se producen en el interior del mismo debidas a este cambio de forma.

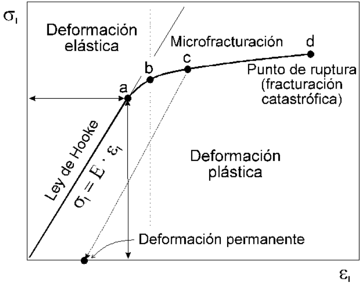
- Para resolver ese problema, en general es necesario determinar el campo de tensiones y el campo de deformaciones del sólido.
- Las ecuaciones necesarias para ello son:
  - *Ecuaciones de equilibrio*, que relacionan tensiones internas del sólido con las cargas aplicadas. Las ecuaciones de la estática son deducibles de las ecuaciones de equilibrio.
  - *Ecuaciones constitutivas*, que relacionan tensión y deformación, y en las que pueden intervenir también otras magnitudes como temperatura, velocidad de deformación, deformaciones plásticas acumuladas, variables de endurecimiento, etc.
  - *Ecuaciones de compatibilidad*, a partir de la cual pueden calcularse los desplazamientos en función de las deformaciones y las condiciones de contorno o borde que tienen en cuenta efectos externos.

Tipos de sólidos deformables

- Los sólidos deformables difieren unos de otros en su ecuación constitutiva.
- Según sea la ecuación constitutiva que relaciona las magnitudes mecánicas y termodinámicas relevantes del sólido, se tiene la siguiente clasificación para el comportamiento de sólidos deformables:
  - Comportamiento elástico.
  - Comportamiento plástico.
  - Comportamiento viscoso.

Tipos de sólidos deformables

- Comportamiento elástico.
  - Se da cuando un sólido se deforma adquiriendo mayor energía potencial elástica y, por tanto, aumentando su energía interna sin que se produzcan transformaciones termodinámicas irreversibles.
  - La característica más importante del comportamiento elástico es que es **reversible**: si se suprimen las fuerzas que provocan la deformación el sólido vuelve al estado inicial de antes de aplicación de las cargas.
- Comportamiento plástico.
  - Existe **irreversibilidad**; aunque se retiren las fuerzas bajo las cuales se produjeron deformaciones elásticas, el sólido no vuelve exactamente al estado termodinámico y de deformación que tenía antes de la aplicación de las mismas. [Ej. carga/descarga]



Tipos de sólidos deformables

- Comportamiento viscoso.
  - Se produce cuando la velocidad de deformación entra en la ecuación constitutiva. Típicamente para deformar con mayor velocidad de deformación es necesario aplicar más tensión que para obtener la misma deformación con menor velocidad de deformación, pero aplicada más tiempo. [Ej. pantano, espuma viscoelástica de poliuretano].
  - Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Memory_foam.

Espuma de *memory foam* rápida.

Espuma de *memory foam* lenta.

Mecánica Aplicada de Sólidos

- El método general de abordaje para resolver problemas en mecánica aplicada es similar al de cualquier *investigación científica*.
  1. Seleccionar sistema de interés.
  2. Características del postulado del sistema. Esto generalmente implica idealización y simplificación de la situación real.
  3. Aplicar los principios de la mecánica al modelo idealizado. Deduce las consecuencias.
  4. Compare estas predicciones con el comportamiento del sistema real. Esto generalmente implica recurrir a pruebas y experimentos.
  5. Si no se logra un resultado satisfactorio, se deben reconsiderar los pasos anteriores. Muy a menudo se avanza alterando los supuestos con respecto a las características del sistema, es decir, construyendo un modelo idealizado diferente del sistema.
- Este curso abordará fundamentalmente los **tres primeros pasos** y ocasionalmente hará referencia a algún otro si fuera preciso.

Principios fundamentales de Mecánica

- El análisis de un *sistema mecánico* implica:
  1. Estudio de fuerzas.
  2. Estudio del movimiento y la deformación.
  3. Aplicación de leyes que relacionan las fuerzas con el movimiento y la deformación.
- El estudio del movimiento involucra la geometría y el tiempo. Podemos distinguir dos tipos de movimiento, (i) cambio de la posición del cuerpo con el tiempo, (ii) cambios en la forma del cuerpo, se producen distorsiones locales, es decir se deforma.
- Las hipótesis que relacionan fuerza y deformación (tratadas en Unidades posteriores de este curso) nos permiten determinar estados del sistema:
  1. fuerzas aplicadas → movimiento y deformación.
  2. movimiento y deformación → fuerzas aplicadas.

- Los problemas tratados en este curso generalmente no implicarán un movimiento general.
- Como consecuencia, **los pasos básicos en el análisis** pueden simplificarse a:
    I. Estudio de fuerzas.
    II. Estudio de deformaciones.
    III. Aplicación de leyes que relacionan las fuerzas con las deformaciones (ley constitutiva).

1.2 Concepto de fuerza

- El desarrollo de la idea de "fuerza" en mecánica nos proporciona un medio eficaz para describir una interacción física muy compleja entre "cuerpos" en términos de un concepto simple y conveniente.
- Podemos decir que:
  1. La fuerza es una interacción vectorial, la cual puede describirse mediante un par de vectores iguales y opuestos que tienen la misma línea de acción.
  2. La magnitud de una fuerza se puede establecer en términos de un experimento estandarizado.
  3. Cuando dos o más fuerzas actúan simultáneamente, en un punto, el efecto es el mismo que si estuviera actuando una sola fuerza igual a la suma vectorial de las fuerzas individuales.

1.3 Concepto de Momento

- El momento de una fuerza $\boldsymbol{F}$, aplicada en un punto P con respecto de un punto O viene dado por el producto vectorial o cruz del vector posición $\mathbf{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, por el vector fuerza, **en ese orden**; esto es,

$$\boldsymbol{M} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{F},$$

  donde $\mathbf{r}$ es el vector que va desde O a P, a veces se lo denota como $\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}$.
- Por la propia definición del producto vectorial, el momento $\boldsymbol{M}$ es un vector perpendicular al plano determinado por los vectores $\boldsymbol{F}$ y $\mathbf{r}$.
- También se denomina momento dinámico o sencillamente momento. Ocasionalmente recibe el nombre de torque a partir del término inglés (*torque*), derivado a su vez del latín *torquere* (retorcer).

- Cuando varias fuerzas $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ actúan sobre un cuerpo, su momento total sobre un punto fijo O se define como la suma

$$\mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \mathbf{r}_n \times \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{F}_i,$$

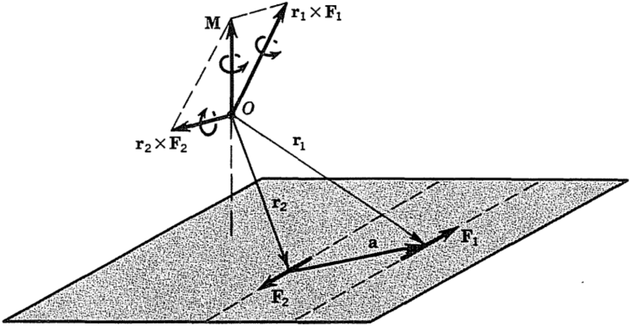
  donde los $\mathbf{r}_i$ son vectores de desplazamiento desde O a puntos en las líneas de acción de $\boldsymbol{F}_i$.

- Un caso particularmente interesante ocurre cuando hay dos fuerzas iguales y paralelas $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$ que tienen sentido opuesto. Tal configuración de fuerzas se llama *cupla* o *par de fuerzas*.

- **Ejemplo 1.1:** Mostrar que el momento de una cupla es el mismo para todos los puntos en el espacio, siendo su módulo

$$F_1 d = F_2 d,$$

donde d es la distancia perpendicular entre las fuerzas (brazo del par).



Momento $\boldsymbol{M}$ de una cupla sobre el punto O.

- **Ejemplo 1.1** (*cont.*)**:** para resolver este problema primero escribimos la suma de los momentos que ejercen las fuerzas $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$ sobre el punto O, luego relacionamos las distancias $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ de forma vectorial ($\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}$) y finalmente empleamos el hecho de que $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$.

  Es decir:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\ &= (\mathbf{r}_2 + \mathbf{a}) \times \boldsymbol{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \\ &= \mathbf{r}_2 \times (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) + \mathbf{a} \times \boldsymbol{F}_1,\end{aligned}$$

  por lo tanto

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \mathbf{a} \times \boldsymbol{F}_1}.$$

- El resultado anterior nos dice que el momento $\boldsymbol{M}$ que produce una cupla es independiente de donde éstas se aplican, $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$.
- En otras palabras, $\boldsymbol{M}$ es independiente de O y es el mismo para cualquier punto del espacio.

1.4 Condiciones de equilibrio

- De acuerdo con la ley de movimiento de Newton, una partícula no tiene aceleración si la fuerza resultante que actúa sobre ella es cero.
- Decimos que tal partícula está en *equilibrio*.
- No obstante, aceleración cero implica solo velocidad constante, el caso con el que tratamos más frecuentemente es el de velocidad cero.
- El estudio de fuerzas en sistemas en reposo se llama *estática*.
- Si varias fuerzas actúan sobre una partícula, la condición necesaria y suficiente para que la partícula esté en equilibrio es

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}.$$

- En estas circunstancias, decimos que las fuerzas están *balanceadas* o *equilibradas* o en *equilibrio*.

- **Considere un sistema aislado de partículas**.
- Decimos que tal sistema está en equilibrio si cada una de sus partículas constituyentes está en equilibrio. Ahora las fuerzas que actúan sobre cada partícula son de dos tipos, *externas* e *internas*.
- Si cada partícula en el sistema aislado está en equilibrio, la fuerza resultante sobre ella es cero.
- La suma vectorial de todas las fuerzas es claramente cero, ya que la suma vectorial de cada grupo alrededor de cada partícula debe ser cero por separado.
- Sin embargo, en el proceso de agregar todos los vectores, encontramos que las fuerzas internas se producen en pares auto cancelables y, por lo tanto, nos queda el resultado de que *si un conjunto de partículas está en equilibrio, la suma vectorial de las fuerzas externas debe ser cero*, i.e.

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \mathbf{0}. \tag{1.1}$$

- Consideremos además el momento total de todas las fuerzas sobre un punto arbitrario O. El momento total debe ser cero ya que la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre cada partícula es por separado cero.
- Sin embargo, en el proceso de formación del momento total de todos los vectores, encontramos que las fuerzas internas se producen en pares auto cancelables que tienen la misma línea de acción y, por lo tanto, no contribuyen al momento total.
- De lo anterior nos queda el resultado de que *si un conjunto de partículas está en equilibrio, el momento total de todas las fuerzas externas sobre un punto arbitrario O debe ser cero*, i.e.

$$\mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \mathbf{r}_n \times \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \mathbf{0}, \tag{1.2}$$

donde $\mathbf{r}_i$ representa un vector de posición que se extiende desde O hasta un punto arbitrario en la línea de acción de la fuerza externa $\boldsymbol{F}_i$.

- Las Eqs. (1.1) y (1.2) son condiciones necesarias para el equilibrio; es decir, si el sistema está en equilibrio, entonces éstas deben satisfacerse.
- Sin embargo, es interesante considerar el problema inverso. Supongamos que sabemos que las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de partículas satisfacen tanto la Eq. (1.1) como la Eq. (1.2).
- Entonces:
  ¿Podemos concluir que cada una de las partículas constituyentes del sistema aislado está en equilibrio?

Esencia de la Teoría del Equilibrio

- Si un sistema de partículas fuera perfectamente rígido para que ningún par de partículas pudiera separarse, las fuerzas internas podrían ajustarse automáticamente para proporcionar un equilibrio interno siempre que las fuerzas externas estén en equilibrio.
- *Las condiciones* **necesarias y suficientes** *para que* **un cuerpo perfectamente rígido** *esté en equilibrio es que la suma vectorial de todas las fuerzas externas debe ser cero y que la suma de Los momentos de todas las fuerzas externas sobre un punto arbitrario, junto con cualquier momento externo aplicado, deben ser cero.*
- **Una condición necesaria y suficiente** *para el equilibrio de un* **sistema deformable** *es que los conjuntos de fuerzas externas que actúan sobre el sistema y sobre cada posible subsistema aislado del sistema original, deben ser conjuntos de fuerzas que satisfagan tanto (1.1) como (1.2).*

Esencia de la Teoría del Equilibrio

- Para concluir, vale la pena mencionar que en una escala suficientemente fina, las partículas microscópicas que constituyen un sistema, generalmente no están en equilibrio, aunque el conjunto de partículas está en un estado de equilibrio macroscópico. Este es el caso en cualquier pieza “estática” de metal, líquido, gas, etc.
- El estudio de los efectos producidos por las partículas fuera del equilibrio constituye el eje central de estudio de la *mecánica estadística.*
- Las dos ecuaciones vectoriales (1.1) y (1.2) son equivalentes a seis ecuaciones escalares para que, en general, podamos resolver seis incógnitas escalares en cada conjunto de fuerzas externas.

Curiosidades

- Why do wind turbines (usually) have 3 blades?
- So, if a wind turbine tower is not stiff enough ... it dances!


Bibliografía

Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).
An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.

Russel C. Hibbeler (2011).
Mecánica de Materiales. 8va Ed. México, Pearson, 2011.

Fin