

Mecánica de los Sólidos – Unidad 1C

Principios fundamentales y Diagramas de Esfuerzos

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, agosto de 2021

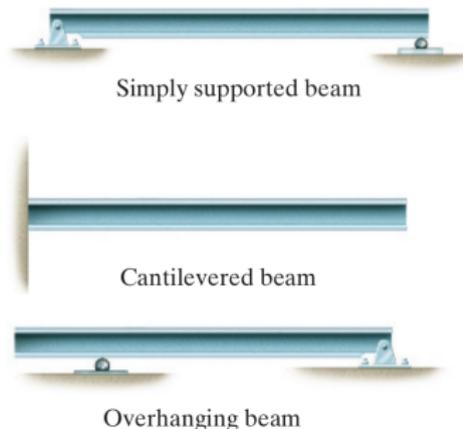


- 3 Componentes estructurales esbeltos
 - 3.1 Método general
 - 3.2 Cargas distribuidas
 - 3.3 Resultante de fuerzas distribuidas
 - 3.4 Relaciones diferenciales de equilibrio
 - 3.5 Funciones de singularidad
 - 3.6 Fuerzas de fluidos
 - 3.7 Problemas en 3D

- En este capítulo nos ocuparemos solo del paso 1, Eq. (2.1), el estudio de las fuerzas y los requisitos de equilibrio, aplicado a elementos esbeltos o elementos delgados, *i.e.* *isostáticos*.
- Por elemento esbelto nos referimos a cualquier parte cuya longitud es mucho mayor (al menos cinco veces mayor) que cualquiera de sus otras dimensiones transversales.
- Esta clasificación incluye elementos como vigas, columnas, ejes, árboles de transmisión, varillas, largueros, puntales, cuerdas o cables, tirantes y eslabones de cadenas.
- Incluso una varilla larga y delgada con forma de anillo o un resorte helicoidal, cuyo diámetro es grande en comparación con el grosor de la varilla, puede considerarse como un elemento esbelto.
- Un elemento mecánico se puede tirar, doblar y torcer, es decir, se puede someter a tracciones, a flexiones y a torsiones.
- Anteriormente hemos considerado las cargas de tracción y compresión a lo largo del eje de un elemento. Ahora pasamos a un estudio de fuerzas y momentos que tienden a torcer o doblarlo.

- Los elementos esbeltos que soportan cargas aplicadas en forma perpendicular a su eje longitudinal se denominan vigas.
- En general, las vigas son barras largas, rectas, con un área constante en su sección transversal.
- A menudo se clasifican de acuerdo con la forma en que están apoyadas. Por ejemplo:

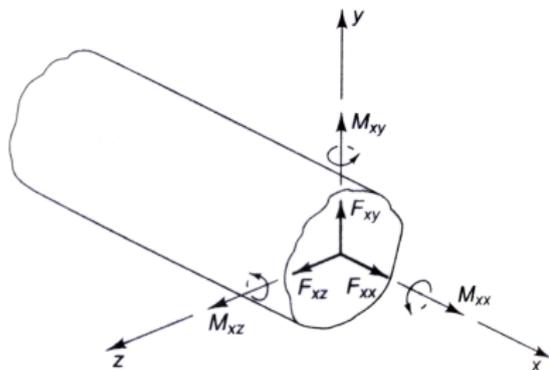
- una viga simplemente apoyada está articulada en un extremo y sostenida por un rodillo en el otro;
- una viga en voladizo se encuentra fija en un extremo y libre en el otro;
- una viga con voladizo si tiene uno o ambos extremos extendidos más allá de los apoyos.



- Las vigas se utilizan para sostener el piso de un edificio, la cubierta de un puente o el ala de un avión.
- Además, el eje de un automóvil, el aguilón de una grúa e incluso muchos de los huesos del cuerpo humano actúan como vigas.

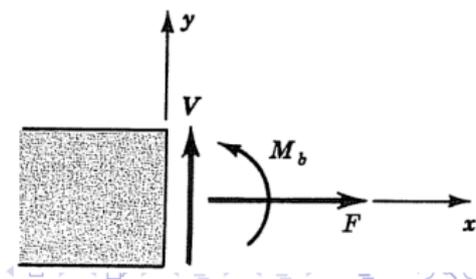
3.1 Método general

- Un método general para determinar las fuerzas y los momentos que actúan en cualquier sección de un elemento esbelto, que está en equilibrio, es imaginar un *corte o sección* hipotética a través del elemento en el punto de interés.
- Si luego consideramos cualquiera de las partes del elemento como un cuerpo libre aislado, la fuerza y el momento requeridos en la sección para mantener esa parte del elemento en equilibrio se pueden obtener aplicando las condiciones para el equilibrio.
- En general, habrá una fuerza y un momento actuando a través de la sección.
- Por conveniencia, generalmente descomponemos la fuerza y el momento en componentes normales y paralelos al eje del elemento.



- La notación F_{xx}, F_{xy}, \dots , etc., en la figura anterior se usa para indicar tanto la orientación de la sección transversal recta como la dirección de la fuerza o del momento que se esté considerando.
- El primer subíndice indica la dirección del vector normal dirigido hacia afuera. La cara de la sección transversal. La cara de la sección transversal se llamará positiva cuando la normal exterior apunte en la dirección positiva del eje de coordenadas.
- La cara de la sección transversal, en la figura anterior, es una cara positiva (normal hacia $x+$).
- El segundo subíndice indica la dirección de coordenadas de la componente de fuerza o momento. Por lo tanto, F_{xy} es la fuerza en la dirección y y M_{xz} es la componente de momento en la dirección z , ambos actuando sobre la sección x .

- Las diferentes componentes tienen diferentes efectos en el elemento y, por lo tanto, se les han dado nombres especiales, como se indica a continuación:
 - F_{xx} *Fuerza o esfuerzo axial*. Esta componente tiende a alargar el elemento y a menudo se le da el símbolo F o F_x .
 - F_{xy}, F_{xz} *Fuerzas o esfuerzos de corte*. Estas componentes tienden a cortar una parte del elemento en relación con la parte adyacente y a menudo se les da los símbolos V o V_y y V_z .
 - M_{xx} *Momento de torsión o torsor*. Esta componente es responsable de la torsión del elemento sobre su eje y a menudo se le da el símbolo M_t o M_{tx} .
 - M_{xy}, M_{xz} *Momentos de flexión o flector*. Estas componentes hacen que el elemento se doble y, a menudo, reciben los símbolos M_b o M_{by} y M_{bz} (b : *bending*).
- Si el plano de carga es el plano xy , solo intervienen tres componentes: la fuerza axial F_{xx} (F), la fuerza cortante F_{xy} (V) y el momento flector M_{xz} (M_b).

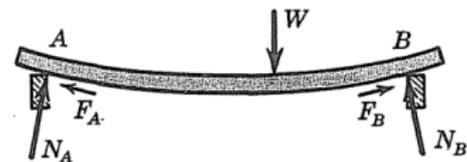
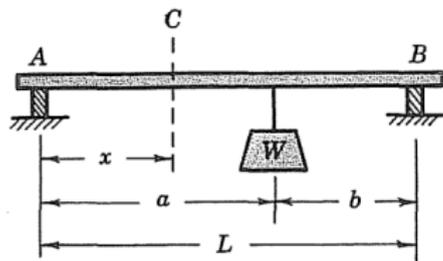


- Para garantizar la coherencia y la reproducibilidad del análisis, será conveniente definir una **convención de signos** para la fuerza axial, la fuerza de corte, el momento de torsión y el momento de flexión.
- Los definiremos como positivos cuando la componente de la fuerza o del momento actúa sobre una cara positiva en una dirección de coordenadas positiva.
- La determinación de tensiones y deformaciones en un elemento esbelto requiere el conocimiento de las fuerzas y de los momentos.
- Los pasos necesarios para determinar las fuerzas y los momentos en un elemento esbelto son:
 - (1) Idealice el problema real, es decir, cree un modelo del sistema y aísle la estructura principal, mostrando las fuerzas que actúan sobre la estructura.
 - (2) Usando las ecuaciones de equilibrio ($\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$), calcule cualquier fuerza externa o de apoyo desconocida.
 - (3) Corte una sección de interés del elemento, aísle uno de los segmentos, y repita el paso 2 en ese segmento.

- Debido a las cargas aplicadas, las vigas desarrollan una fuerza cortante interna y un momento flexionante que, en general, varían de un punto a otro a lo largo del eje de la viga.
- Por lo tanto, para diseñar correctamente una viga es necesario determinar la fuerza cortante y el momento máximo en la viga.
- Una forma de hacerlo es expresar V y M en función de su posición arbitraria x sobre el eje de la viga.
- Estas funciones de fuerza cortante y de momento se suelen representar mediante gráficas llamadas *diagrama de fuerza cortante* y *diagrama de momento flector* o *de momento* o *de flexión*; o simplemente ambos como *diagramas de corte y momento*.
- También son empleados al analizar elementos esbeltos los diagramas de la fuerza axial y del momento de torsión.

- Los diagramas de fuerza cortante y de momento proporcionan información detallada sobre la variación de la fuerza cortante y del momento en el eje de la viga, por ello son utilizados con frecuencia por los ingenieros para decidir dónde colocar los materiales de refuerzo dentro de la viga o para determinar la proporción del tamaño de la viga en varios puntos de toda su longitud.
- Para formular V y M en términos de x es necesario elegir el origen y el sentido positivo de x . Aunque la elección es arbitraria, a menudo el origen se encuentra en el extremo izquierdo de la viga y la dirección positiva es hacia la derecha.
- Una idealización frecuente es suponer que tanto la carga que actúa sobre la estructura delgada, así como las fuerzas de soporte están concentradas, es decir son fuerzas “puntuales”.

- **Ejemplo 3.1:** determinar para la viga simplemente apoyada con carga concentrada [Crandall, 1999], las fuerzas y momentos actuando sobre la sección C .

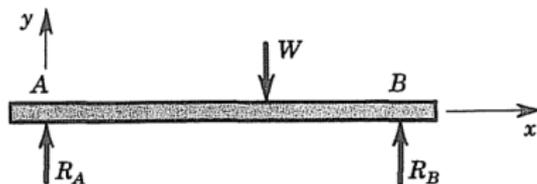


- Analizemos la naturaleza de las fuerzas de apoyo. Si la viga no es completamente rígida, tenderá a doblarse levemente.
- Las reacciones entre la viga y los soportes tendrán una componente normal N_A, N_B y una componente de fricción tangente a la viga F_A, F_B .
- Podemos decir muy poco sobre la magnitud y el sentido de las fuerzas de fricción, solo que están limitadas por el coeficiente de fricción estático. Cuando el coeficiente de fricción es pequeño, podemos suponer que las fuerzas de fricción serán pequeñas en comparación con las fuerzas normales, es decir

$$\mu_s \ll 1 \quad \rightarrow \quad F_A, F_B \ll N_A, N_B.$$

● Ejemplo 3.1: (cont.)

- Sobre la base de estas consideraciones idealizamos el sistema, donde mostramos reacciones verticales R_A en A y R_B en B .



- Observamos que en el sistema idealizado también hemos despreciado el peso de la viga debido a que es pequeño en comparación con la carga W .
- En base a las idealizaciones realizadas es posible resolver el problema bajo análisis. Estos resultados proporcionarán un marco cuantitativo sobre el cual basar las estimaciones de las fuerzas longitudinales.
- Equilibrio, las fuerzas son \parallel al eje y .
- Resolviendo las ecuaciones del equilibrio

$$\sum F_y = R_A + R_B - W = 0,$$

$$\sum M_A = R_B L - W a = 0,$$

$$\sum M_B = W b - R_A L = 0.$$

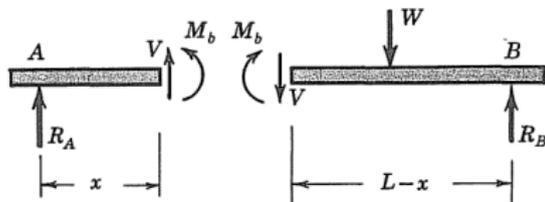
y

$$R_A = \frac{Wb}{L},$$

$$R_B = \frac{Wa}{L}.$$

● **Ejemplo 3.1:** (cont.)

- Para determinar las fuerzas internas en C aplicamos las condiciones de equilibrio al miembro izquierdo de la figura.



$$\sum F_y = R_A + V = 0,$$

$$\sum M_C = M_b - R_A x = 0.$$

- Siendo finalmente la fuerza cortante V y el momento flector M_b

$$V = -R_A = -\frac{Wb}{L},$$

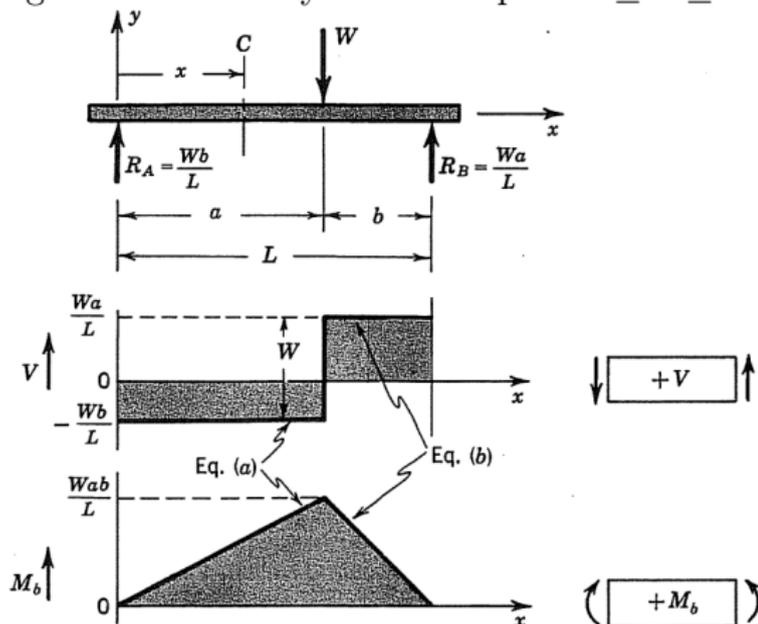
$$M_b = R_A x = \frac{Wb}{L} x.$$

- **Ejemplo 3.2:** dada una viga simplemente apoyada con carga concentrada, realizar los diagramas de corte y momento para $0 \leq x \leq L$.

- Consideramos el caso $0 < x < a$, siendo las expresiones de V y M_b las determinadas en el Ejemplo 3.1, es decir

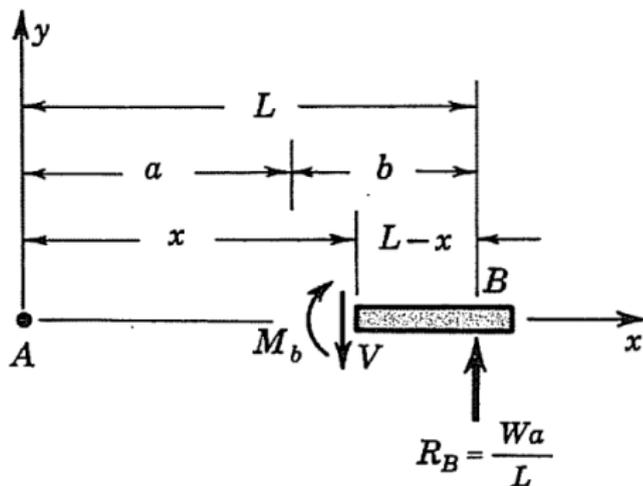
$$V = -\frac{Wb}{L},$$

$$M_b = \frac{Wb}{L}x. \quad (a)$$



● **Ejemplo 3.2 (cont.):**

- Para completar los diagramas es preciso considerar el diagrama de cuerpo libre de un elemento del lado derecho a W , es decir $a < x < L$.



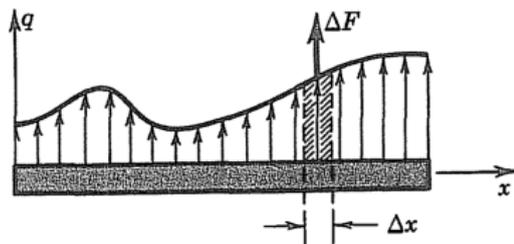
- De las ecuaciones de cuerpo libre obtenemos

$$V = \frac{W a}{L}, \quad M_b = \frac{W a}{L}(L - x). \quad (b)$$

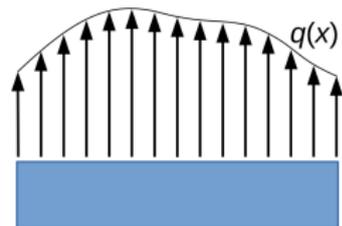
3.2 Cargas distribuidas

- Otra idealización que se emplea comúnmente es el concepto de una carga distribuida continuamente.
- Considere una viga sometida a una carga distribuida de fuerzas paralelas. Dichas fuerzas pueden surgir de presiones de fluidos o gases, o de atracciones magnéticas o gravitacionales.
- Si consideramos la fuerza actuante ΔF en una longitud Δx entonces la intensidad de carga q se define como

$$q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}.$$



- **Convención de signos para las vigas.**
- Aunque la elección de una convención de signos es arbitraria, aquí se utilizará aquella que se emplea con mayor frecuencia en la práctica de la ingeniería y que se muestra en la figura.
- Las direcciones positivas son las siguientes:
 - cuando la carga distribuida actúa hacia arriba sobre la viga,
 - si la fuerza cortante interna ocasiona un giro en sentido antihorario del segmento de viga sobre el que actúa (regla mano derecha hacia afuera),
 - y cuando el momento interno causa compresión en las fibras superiores del segmento, de modo que éste se dobla como para retener agua.
- Las cargas que son opuestas a las descritas anteriormente se consideran negativas.



Carga distribuida externa positiva

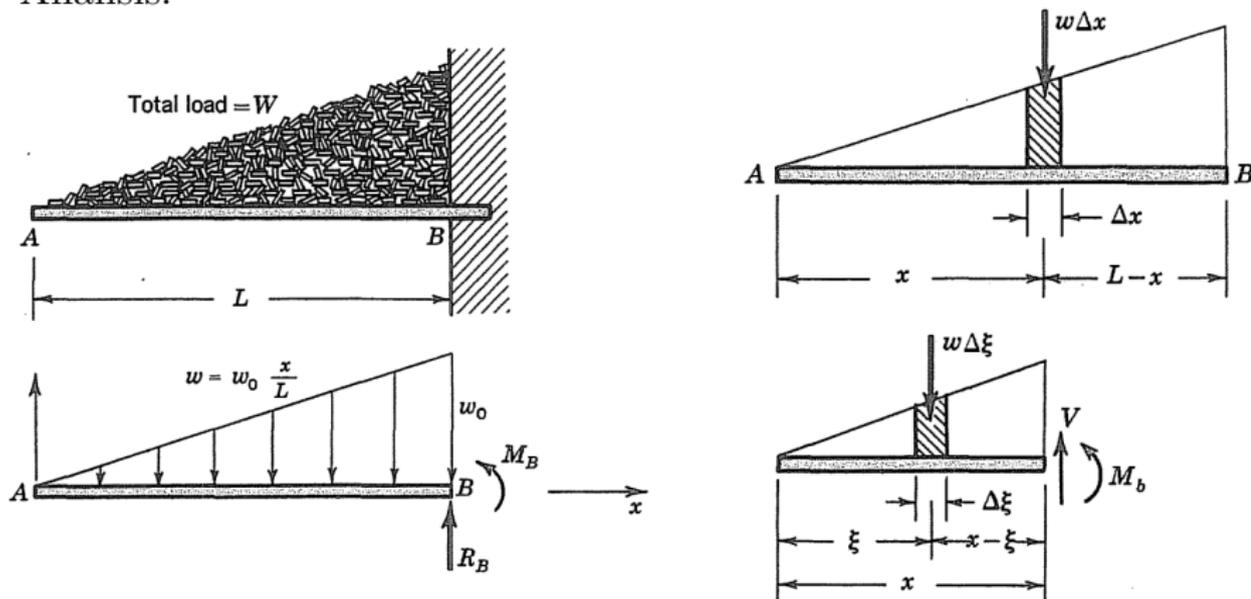


Esfuerzo de corte interno positivo



Momento flector interno positivo

- **Ejemplo 3.3:** Determine diagramas de corte y momento para la viga en voladizo con carga distribuida que se muestra en la figura.
- Análisis:



- Intensidad de carga $q(x) = -w = -w_0 x/L$,

$$W = - \int_0^L q \, dx.$$

● **Ejemplo 3.3:** (*cont.*)

- Equilibrio de fuerzas verticales

$$\sum F_y = R_B - \int_0^L w \, dx = 0,$$

$$\begin{aligned} R_B &= \int_0^L \frac{w_0 x}{L} dx \\ &= \frac{w_0 L}{2} = W. \end{aligned}$$

- Equilibrio de momentos en B

$$\sum M = M_B + \int_0^L w(L-x) dx = 0,$$

$$\begin{aligned} M_B &= - \int_0^L \frac{w_0 x}{L} (L-x) \, dx \\ &= - \frac{w_0}{L} \left(L \frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{3} \right) \\ &= - \frac{w_0 L^2}{6} = - \frac{WL}{3}. \end{aligned}$$

- **Ejemplo 3.3:** (*cont.*)

- Fuerza de corte V y momento de flexión M_b de una sección arbitraria ubicada a una distancia $0 < x < L$

$$\sum F_y = V - \int_0^x w \, d\xi = 0,$$

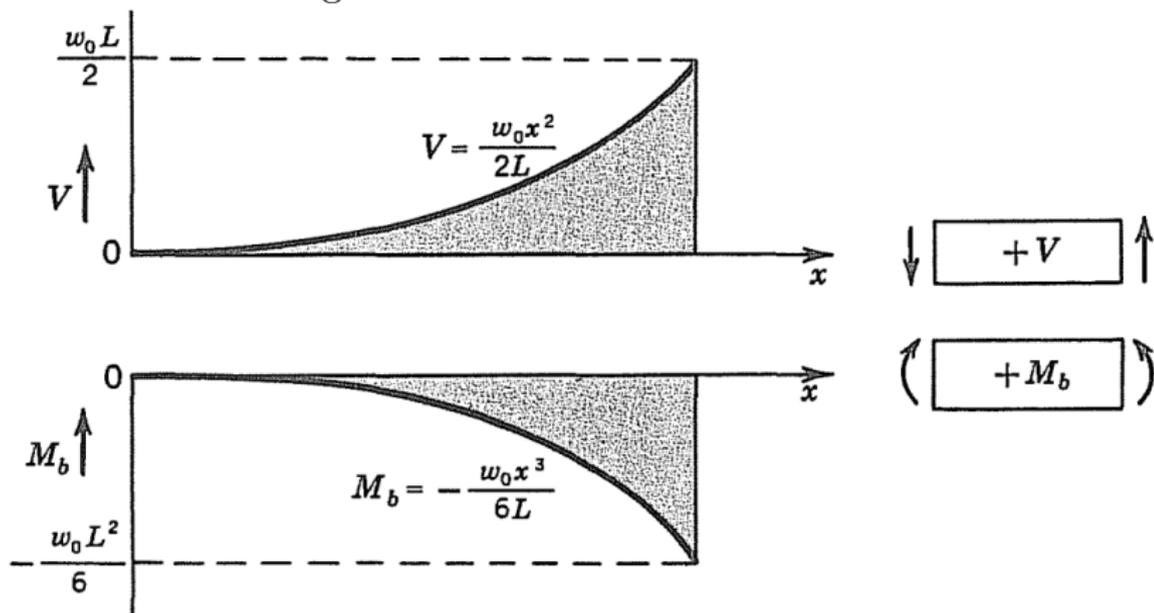
$$\sum M_x = M_b + \int_0^x w(x - \xi) \, d\xi = 0$$

- Resolviendo las ecuaciones anteriores es posible obtener V y M_b

$$V = \int_0^x \frac{w_0 \xi}{L} \, d\xi = \frac{w_0 x^2}{2L},$$

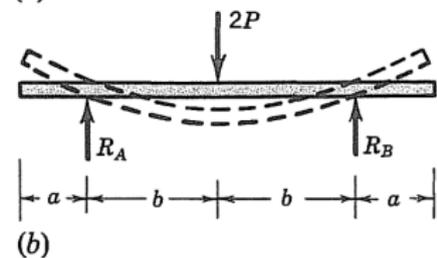
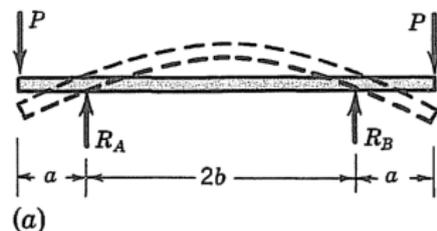
$$M_b = - \int_0^x \frac{w_0 \xi}{L} (x - \xi) \, d\xi = - \frac{w_0 x^3}{6L}.$$

- **Ejemplo 3.3:** (*cont.*) diagramas de corte y momento para la viga en voladizo con carga distribuida.

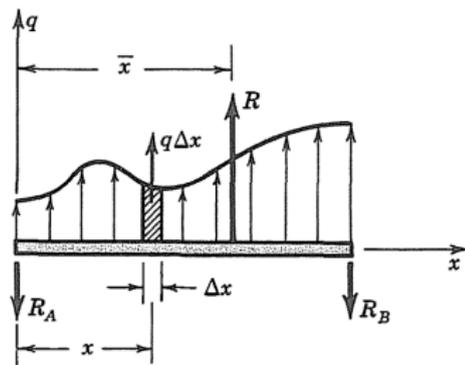


3.3 Resultante de fuerzas distribuidas

- Se dice que dos sistemas de fuerzas son *estáticamente equivalentes* si se necesita el *mismo* conjunto de fuerzas adicionales para reducir cada sistema al equilibrio.
- Una sola fuerza que es estáticamente equivalente a una distribución de fuerzas se llama la *resultante* del sistema de fuerzas distribuidas.
- Al resolver *problemas de carga distribuida*, a menudo es más conveniente trabajar con la resultante de la carga distribuida en lugar de trabajar con la distribución real.
- “Esto solo es posible cuando estamos evaluando reacciones externas sobre el elemento; no está permitido al calcular fuerzas y momentos internos.”
- Sean dos vigas similares, cargadas como en la figura. Una carga dada (a), cuando se reemplaza por su resultante (b), produce las mismas reacciones de apoyo pero no las mismas fuerzas y momentos internos ni las mismas deflexiones.



- Considere una carga unidimensional de fuerzas paralelas de intensidad $q(x)$, como se muestra en la figura.
- Para determinar la magnitud de su resultante R y su ubicación \bar{x} , escribimos las ecuaciones de equilibrio dos veces, una vez usando la carga real $q(x)$ y otra vez usando la resultante R aplicada en \bar{x} .
- Los dos conjuntos de ecuaciones deben dar fuerzas de reacción idénticas si R es el resultado de la carga distribuida.

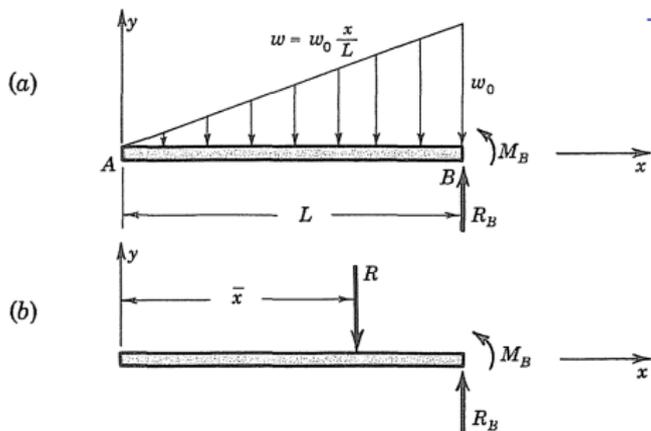


$$\begin{array}{l}
 \sum F_y = \int_0^L q \, dx - R_A - R_B = 0 \\
 \sum M_A = \int_0^L x (q \, dx) - R_B L = 0
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 \sum F_y = R - R_A - R_B = 0 \\
 \sum M_A = R\bar{x} - R_B L = 0
 \end{array}
 \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \int_0^L q \, dx \quad \text{y} \quad \bar{x} = \frac{\int_0^L x q \, dx}{R}}$$

donde \bar{x} es el centroide del diagrama de cargas.

- **Ejemplor 3.4:** Determine diagramas de corte y momento para la viga en voladizo con carga distribuida que se muestra en la figura (a). Considere reemplazar la carga distribuida por su resultante R ubicada en \bar{x} .



- Fuerza resultante de la carga distribuida y centroide

$$R = \int_0^L q \, dx = \frac{w_0 L}{2},$$

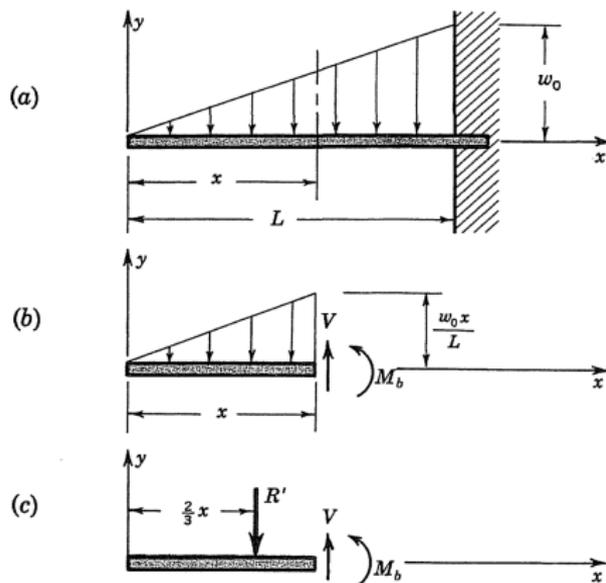
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int_0^L x q \, dx}{R} = \frac{\frac{w_0}{L} \int_0^L x^2 \, dx}{\frac{w_0 L}{2}} \\ &= \frac{2}{L^2} \frac{L^3}{3} = \frac{2L}{3} \end{aligned}$$

- Los apoyos externos R_B y M_B se obtienen fácilmente aplicando las condiciones de equilibrio a la figura (b):

$$R_B = \frac{w_0 L}{2}, \quad M_B = -R(L - \bar{x}) = -\frac{w_0 L^2}{6}.$$

● Ejemplo 3.4: (cont.)

- Como se mencionó anteriormente NO es posible utilizar la resultante R para calcular V y M_b dentro de las vigas.
- Sin embargo, podemos seccionar la viga en un punto arbitrario x , como en la figura (a), de esta forma V y M_b se convierten en fuerzas externas para el elemento de viga aislado de la figura (b).



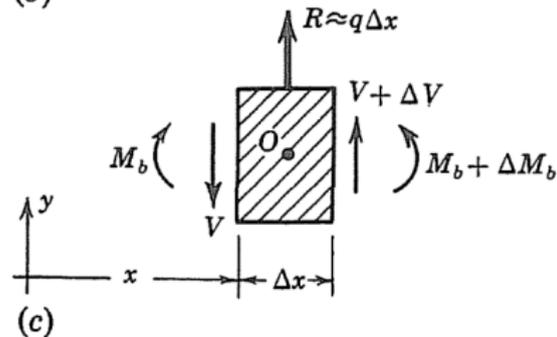
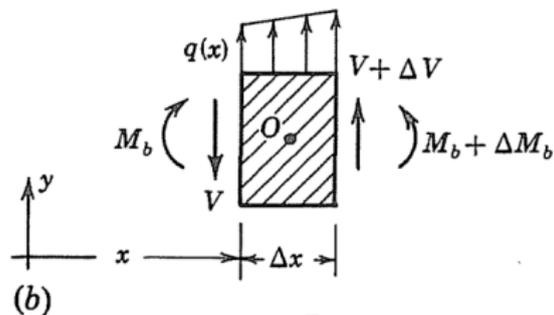
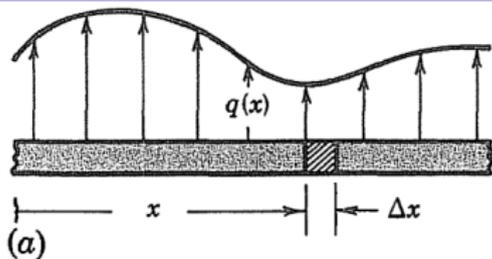
$$V = R' = \int_0^x q \, d\xi = \int_0^x \frac{w_0 \xi}{L} \, d\xi = \frac{w_0 x^2}{2L},$$

$$M_b = -R' \left(x - \frac{2x}{3} \right) = -\frac{R' x}{3} = -\frac{w_0 x^3}{6L}.$$

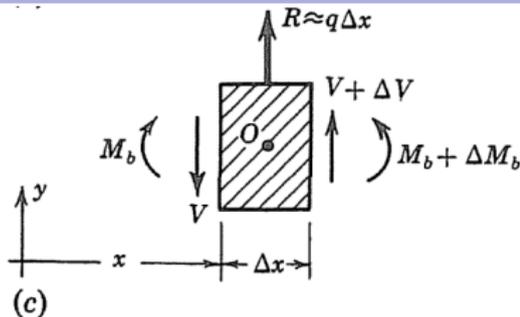
3.4 Relaciones diferenciales de equilibrio

- Ahora pasamos a un procedimiento alternativo para obtener fuerzas y momentos internos a lo largo de un elemento esbelto.
- En lugar de cortar una viga en dos y aplicar las condiciones de equilibrio a uno de los segmentos, consideramos un elemento muy pequeño de la viga como cuerpo libre.
 - Las condiciones de equilibrio combinadas con un proceso de límite nos llevarán a ecuaciones diferenciales que conectan la carga, la fuerza de corte y el momento flector.
 - La integración de estas *relaciones diferenciales de equilibrio* para casos particulares nos proporciona un método alternativo para evaluar las fuerzas de corte y los momentos de flexión.

- La figura (a) muestra un elemento de viga de longitud Δx .
- Las cargas externas en este elemento son la carga distribuida de intensidad q que actúa sobre la longitud Δx , las fuerzas de corte y los momentos de flexión en las dos caras como se muestra en la figura (b).
- En la figura (c) hemos reemplazado la carga distribuida por su resultante R . Estrictamente, debemos calcular R y su ubicación \bar{x} .
- Es evidente que si la variación de $q(x)$ es suave y si Δx es muy pequeña, entonces $R \approx q(x) \Delta x$, y la línea de acción de R pasará por el punto medio O del elemento.



- En aras de la simplicidad y la claridad (y a expensas del rigor matemático) asumiremos por escrito las condiciones de equilibrio de que Δx es tan pequeño que R tiene la magnitud $q \Delta x$ y pasa a través de O .



- Es decir, las condiciones de equilibrio aplicadas a la figura (c) son:

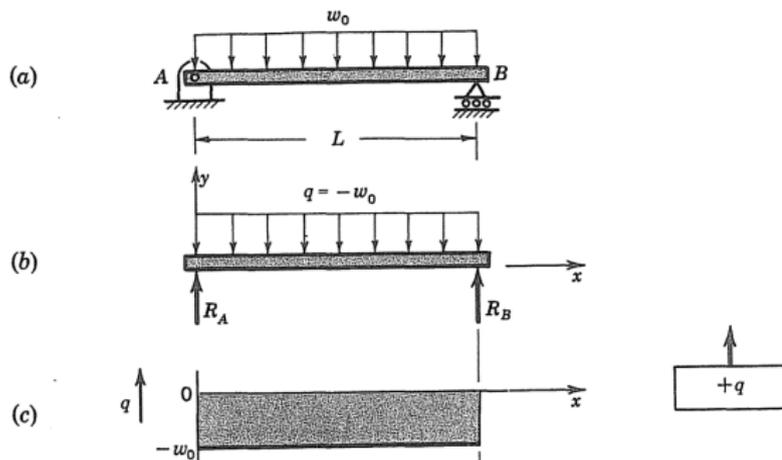
$$\sum F_y = V + \Delta V + q\Delta x - V = 0$$

$$\sum M_O = M_b + \Delta M_b + (V + \Delta V) \frac{\Delta x}{2} + V \frac{\Delta x}{2} - M_b = 0.$$

- En el límite de $\Delta x \rightarrow 0$ se obtienen las ecuaciones diferenciales básicas que relacionan la intensidad de carga $q(x)$ con la fuerza de corte $V(x)$ y el momento flector $M(x)$ en una viga,

$$\boxed{\frac{dV}{dx} + q = 0, \quad \frac{dM_b}{dx} + V = 0.}$$

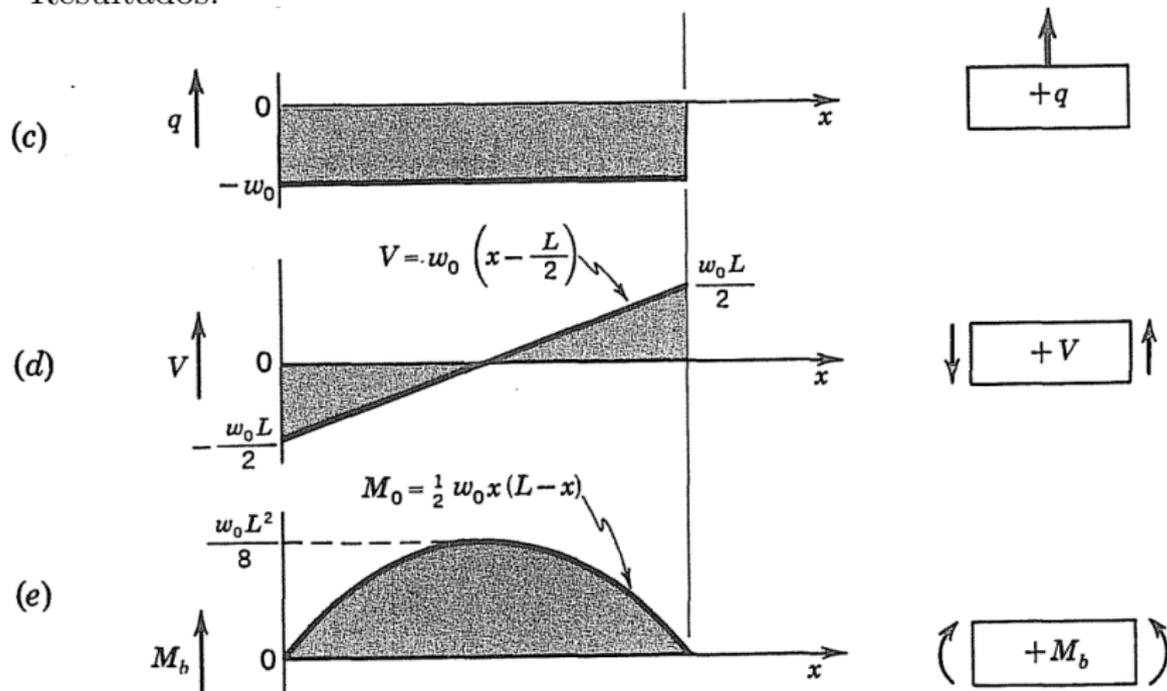
- **Ejemplo 3.5:** viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida.
 - En la figura (a), una viga bajo una carga uniformemente distribuida de intensidad $q = -w_0$ es soportada por una junta fija en A y un soporte de rodillo en B .
 - Se desea obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flector mediante la integración de las relaciones diferenciales vistas anteriormente.



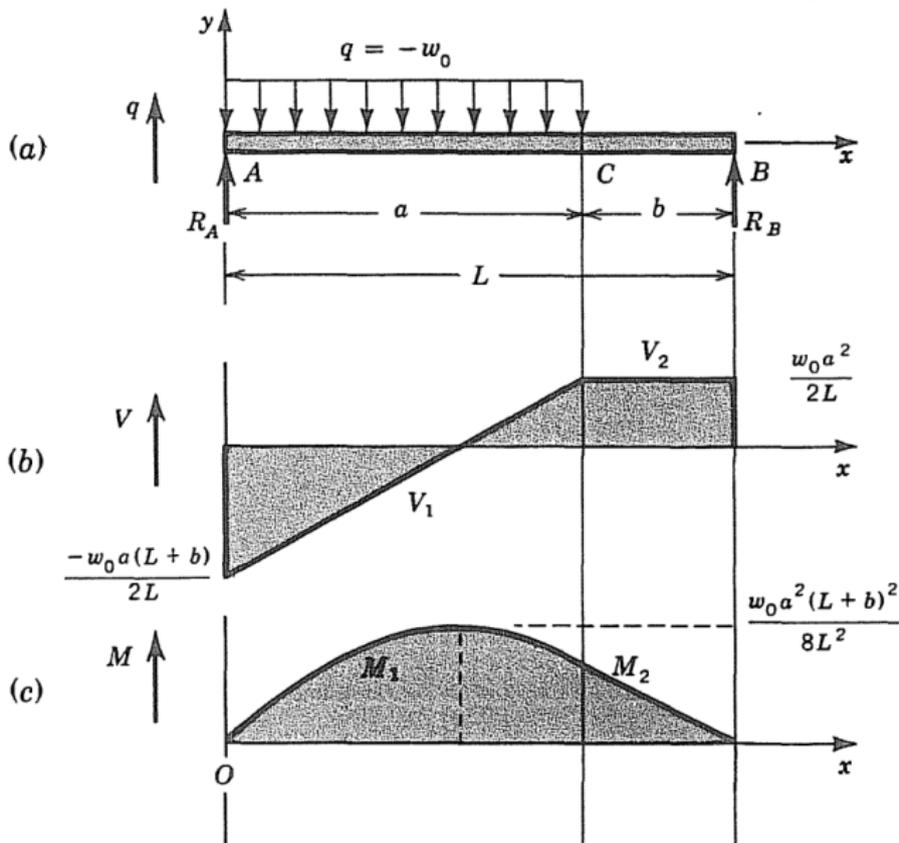
- En la figura (b) se muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga y en (c) el diagrama de la carga aplicada q .

● Ejemplo 3.5: (cont.)

- Resultados:



- **Ejemplo 3.6:** viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida solo en un sector, ver figura.



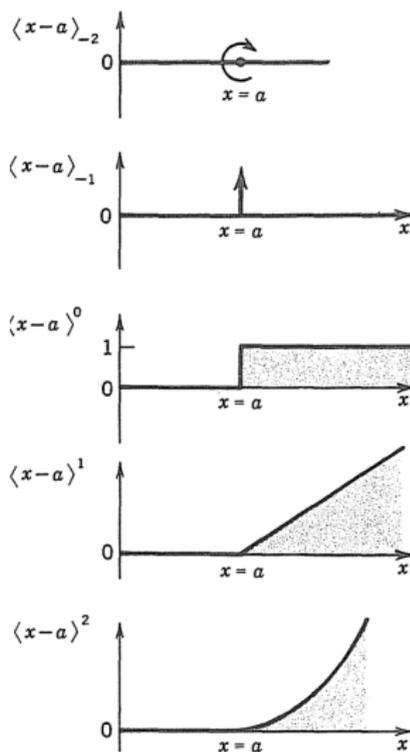
3.5 Funciones de singularidad

- En la sección anterior observamos que el procedimiento de integración puede convertirse en bastante engorroso a menos que haya un formalismo matemático especial para manejar cargas discontinuas.
- Presentamos una *familia de funciones de singularidad* específicamente diseñadas para trabajar con cargas discontinuas.
- Para $n \geq 0$ las funciones de singularidad se definen como

$$f_n(x-a) = \langle x-a \rangle^n = \begin{cases} 0, & x < a, \\ (x-a)^n, & x \geq a. \end{cases}$$

Mientras que su integral es

$$\int_{-\infty}^x \langle \xi - a \rangle^n d\xi = \frac{\langle x - a \rangle^{n+1}}{n+1}, \quad n \geq 0.$$



- La función $f_0(x - a)$ se denomina *escalón unitario* comenzando a $x = a$, mientras que $f_1(x - a)$ es la *rampa unitaria* comenzando en $x = a$.
- El caso de los dos primeros miembros de la familia: $f_{-2}(x - a)$ y $f_{-1}(x - a)$, es excepcional y por ello se suele enfatizar esto mediante el empleo de subíndices en lugar de exponentes, es decir

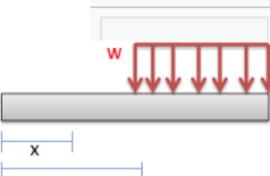
$$f_{-2}(x - a) = \langle x - a \rangle_{-2}, \quad f_{-1}(x - a) = \langle x - a \rangle_{-1}.$$

- Además, $f_{-2}(x - a)$ y $f_{-1}(x - a)$ valen cero para cualquier valor de x excepto para $x = a$ donde valen infinito. Sin embargo se definen tal que:

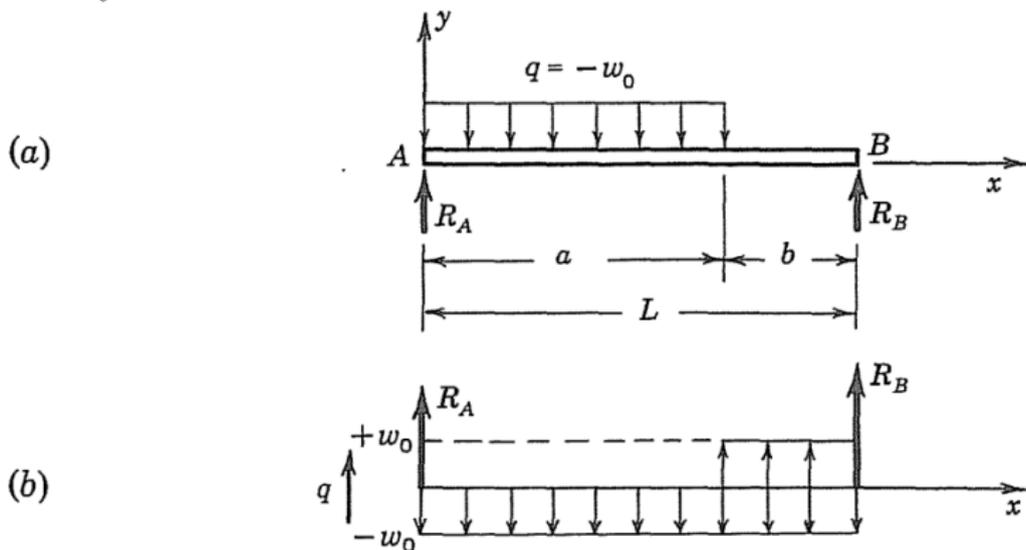
$$\int_{-\infty}^x f_{-2}(\xi - a) d\xi = f_{-1}(x - a), \quad \int_{-\infty}^x f_{-1}(\xi - a) d\xi = f_0(x - a).$$

- $f_{-1}(x)$ se conoce como *carga concentrada unitaria* o función *impulso unitario*, en los libros de física se denomina función *Delta de Dirac*.
- $f_{-2}(x)$ se conoce como *momento concentrado unitario* o función *doblete unitario*. Es la derivada de la función impulso unitario.
- Las reglas de integración de $f_n(x - a)$ nos permiten obtener fuerzas de corte y momentos de flexión mediante la integración de cualquier distribución de carga que podamos representar en términos de esta familia.

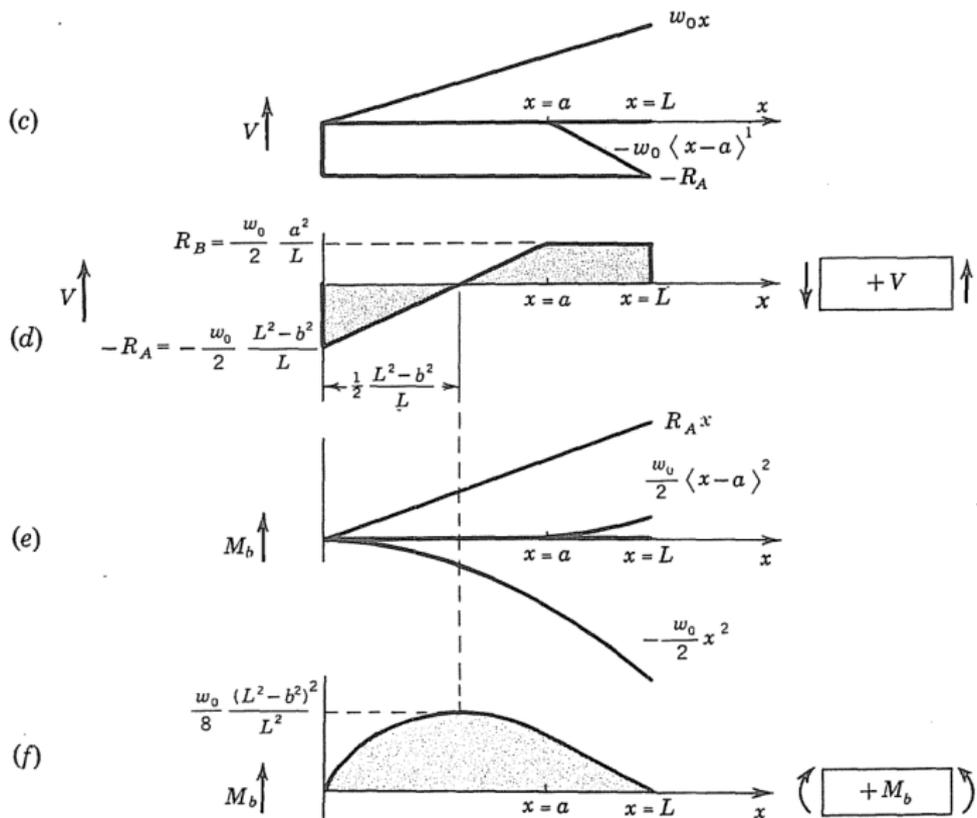
- Ejemplos de distribuciones de intensidad de carga y cómo se representan mediante $f_n(x - a)$. La mayoría de los casos prácticos de carga de vigas se pueden construir por superposición de los casos mostrados en esta figura.

Carga	Función de carga $q = q(x)$	Cortante $V = - \int q(x) dx.$	Momento $M = - \int V(x) dx.$
	$q = -M_0 \langle x - a \rangle_{-2}$	$V = M_0 \langle x - a \rangle_{-1}$	$M = -M_0 \langle x - a \rangle^0$
	$q = -P \langle x - a \rangle_{-1}$	$V = P \langle x - a \rangle^0$	$M = -P \langle x - a \rangle^1$
	$q = -w_0 \langle x - a \rangle^0$	$V = w_0 \langle x - a \rangle^1$	$M = -\frac{w_0}{2} \langle x - a \rangle^2$
	$q = -m \langle x - a \rangle^1$	$V = \frac{m}{2} \langle x - a \rangle^2$	$M = -\frac{m}{6} \langle x - a \rangle^3$

- **Ejemplo 3.7:** viga simplemente apoyada cargada uniformemente en un sector, pero empleando funciones de singularidad, ver figuras.
- Análisis y resultados:



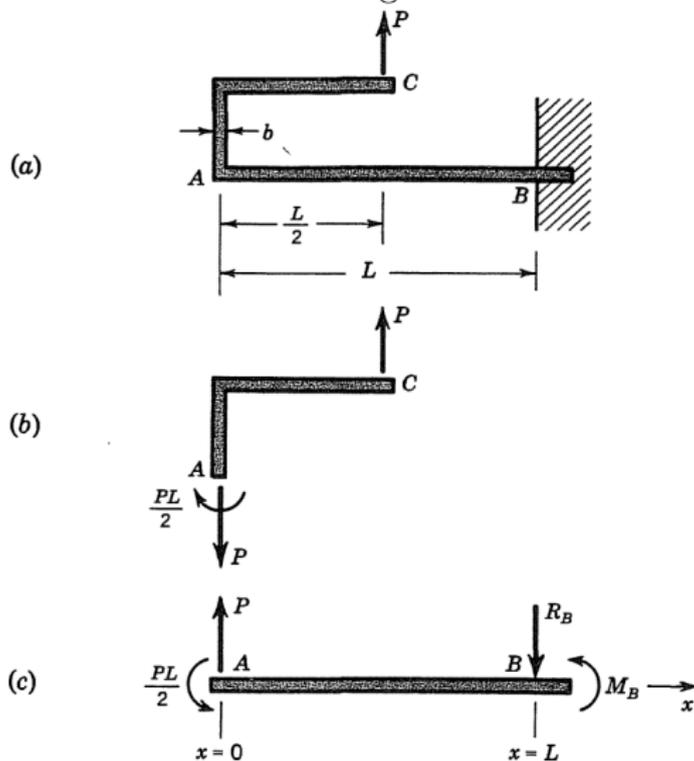
- **Ejemplo 3.7:** (*cont.*) viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida solo en un sector. Análisis y resultados:



- Existen muchas técnicas alternativas para resolver problemas como el ejemplo desarrollado anteriormente.
- El método que hemos mostrado implica la evaluación separada de una reacción de soporte (R_A) que se emplea para evaluar la constante arbitraria de integración C_1 .
- Un procedimiento alternativo implica la introducción de las reacciones de soporte, en el término de carga como incógnitas. Mientras que su determinación se realiza a partir de las dos condiciones de contorno en los momentos en los extremos de la viga.

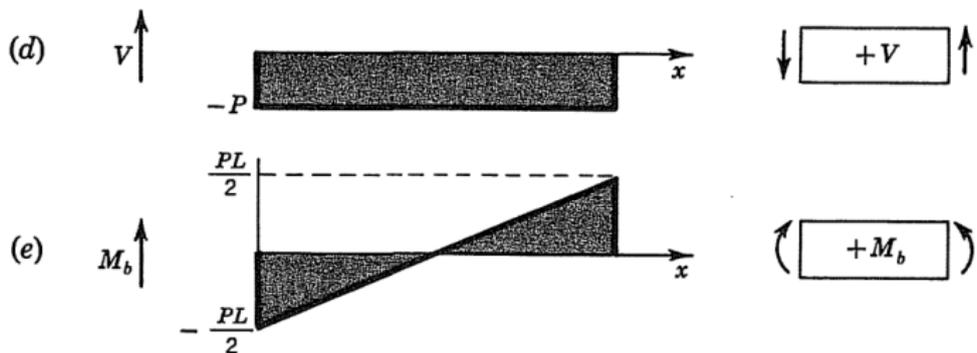
Ejercicio 3.1: considere el problema de la viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida solo en un sector. Calcule, introduciendo las reacciones R_A y R_B en el término de carga $q(x)$, las expresiones de $V(x)$ y $M_b(x)$ así como las reacciones resultantes.

- **Ejemplo 3.8:** se desea obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flector para el segmento AB de la estructura aporticada, que se muestra en las figura, empleando funciones de singularidad.



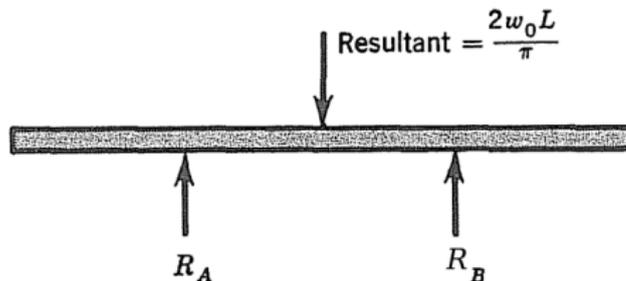
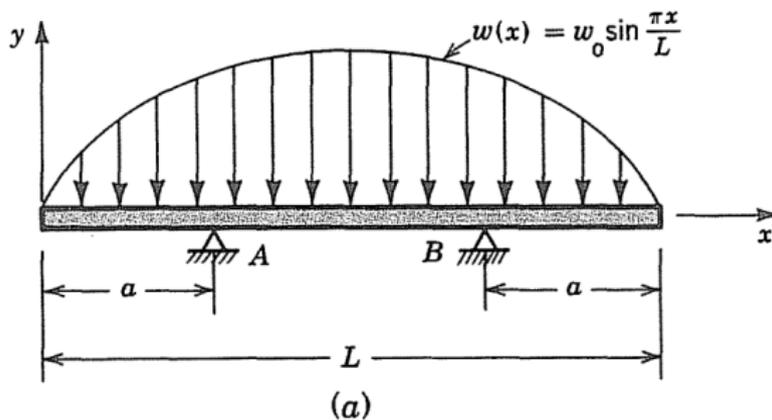
- Un sistema aporticado es aquel, cuyos elementos estructurales principales, consisten en vigas y columnas conectados a través de nudos formando pórticos resistentes en las dos direcciones principales de análisis ($x - y$).

- **Ejemplo 3.8:** (*cont.*) estructura aporcionada. Análisis y resultados:



- Los ejemplos anteriores han mostrado la ventaja de emplear el método de la familia de funciones de singularidad.
- Sin embargo, no es descabellado que ud se haga la pregunta de *¿cuándo incluir las fuerzas de reacción en la función de intensidad de carga?*, o cuestionarse sobre si las fuerzas de reacción se van a incluir en $q(x)$, o si se evalúan primero a partir de los requisitos de equilibrio general o deben evaluarse como en la segunda parte de la solución del Ejemplo 3.7 de la viga simplemente apoyada con carga uniforme en un sector.
- No hay respuestas definitivas a estas preguntas. Todo lo que se puede decir es que **la mejor manera de proceder depende del problema.**
- Sin embargo, en general, el trabajo algebraico se simplifica si todas las reacciones se determinan primero a partir del equilibrio general (suponiendo que esto se pueda hacer).
- Sin embargo, debe enfatizarse nuevamente que, independientemente de la ruta que se siga, todas las constantes de integración deben evaluarse cuidadosamente a partir de las condiciones de borde.

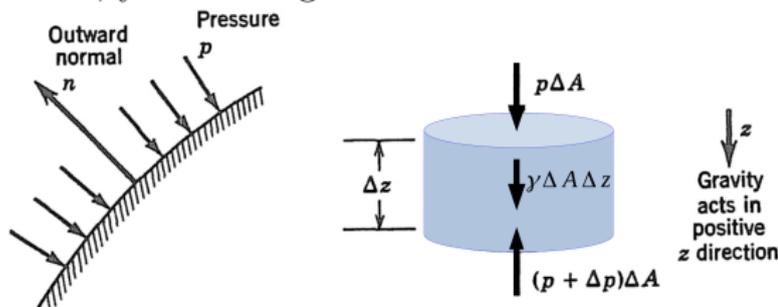
- **Ejemplo 3.9:** Consideremos otro ejemplo en el que es necesario incluir las fuerzas reactivas en el término de carga. Se pide encontrar la ubicación de los apoyos A y B de modo que el momento flector en el punto medio sea cero.



3.6 Fuerzas de fluidos

- En muchas aplicaciones, los componentes estructurales están sujetos a fuerzas debido a fluidos en contacto con la estructura.
- Los líquidos en reposo, por ejemplo, el agua en un globo lleno de agua, no ofrecen una resistencia apreciable a los cambios de forma si las fuerzas que causan el cambio de forma se aplican de manera suficientemente lenta. Esto sugiere que *en un fluido en reposo no hay fuerzas de fricción entre las partículas de fluido*.
- Es decir que la fuerza por unidad de área, o presión hidrostática p , en un punto en un fluido en reposo es normal a cualquier superficie que pase por ese punto.
- Podemos suponer que en un líquido en reposo la presión en un punto es la misma en todas las direcciones. Además, la presión sobre una superficie actúa en la dirección opuesta a la normal que apunta hacia afuera a la superficie.

- Consideremos un fluido en equilibrio bajo la acción de la gravedad, la presión es una función lineal de la distancia desde la superficie libre.
- En la figura se muestra un pequeño elemento cilíndrico de fluido en equilibrio bajo presiones del fluido y del peso del elemento fluido $\gamma \Delta A \Delta z$, donde γ es el peso específico del fluido, ΔA es el área de la sección transversal, y Δz es el grosor vertical del elemento.



- El equilibrio de fuerzas en el plano horizontal se satisface por simetría, y el equilibrio en la dirección z requiere

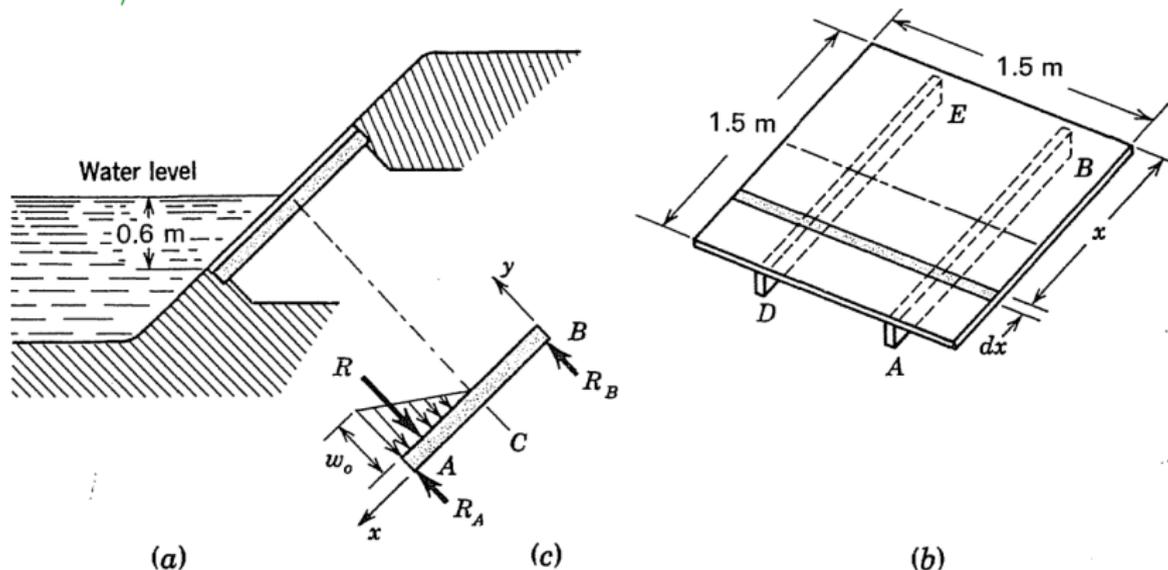
$$p \Delta A + \gamma \Delta A \Delta z - (p + \Delta p) \Delta A = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} : \frac{dp}{dz} = \gamma.$$

- Si la presión de referencia en $z = 0$ se toma como p_0 :

$$p = \gamma z + p_0.$$

Ejercicio 3.2: La figura muestra una puerta cuadrada de 1.5 m que retiene agua a la mitad de su longitud. Se supone que la carga de presión total en la compuerta se transmite a los soportes en A, B, D y E por medio de vigas AB y DE simplemente apoyadas ubicadas simétricamente. Encuentre el momento de flexión máximo en las vigas.

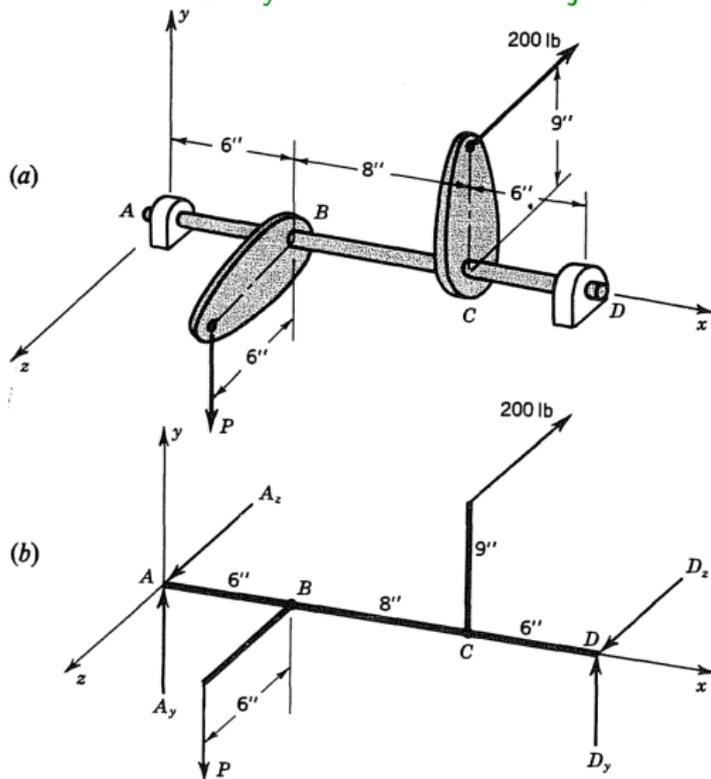
El borde inferior DA de la puerta está a 0.6 m debajo de la línea de flotación, y $\gamma = 9.8 \text{ kN/m}^3$.



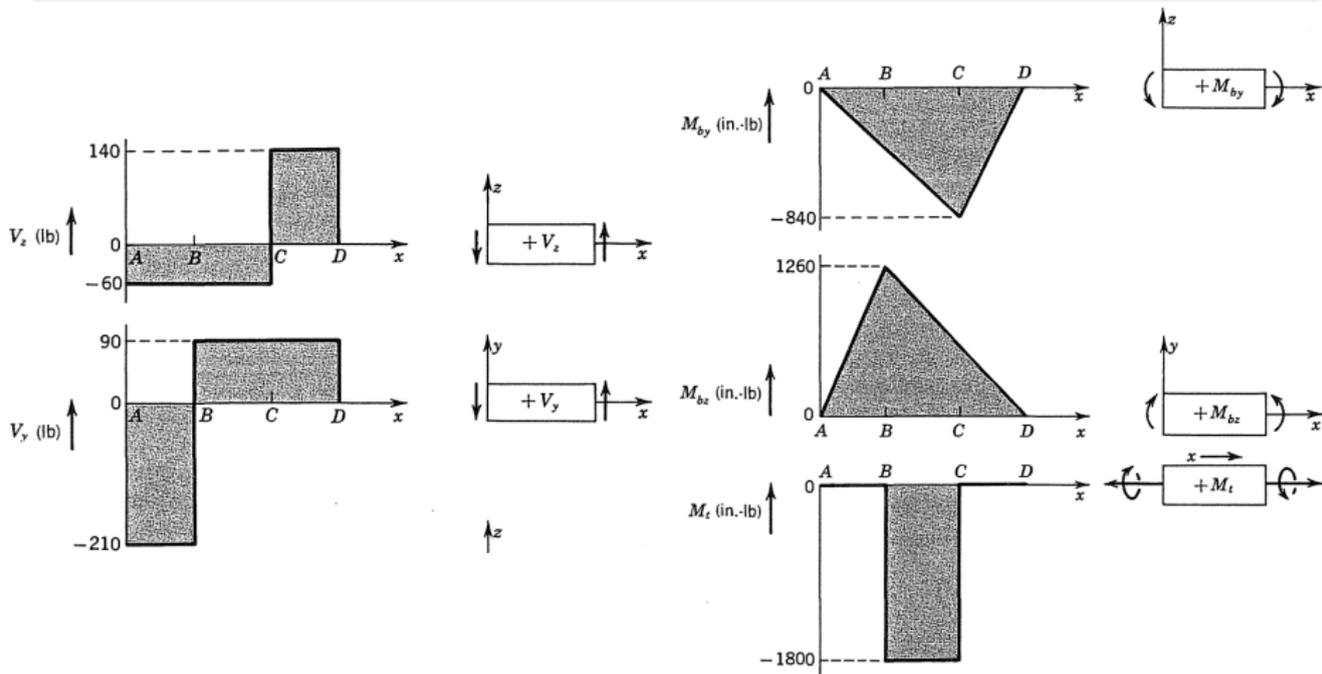
3.7 Problemas en 3D

- El tratamiento que hemos presentado de elementos delgados rectos sometidos a fuerzas que se encuentran en un solo plano que pasa a través del mismo puede extenderse para manejar cargas 3D arbitrarias.
- En el caso general, habrá una fuerza vectorial y un momento vectorial que actúan en cualquier sección del elemento.
- La fuerza y el momento pueden obtenerse aplicando los requisitos de equilibrio a cualquier segmento del elemento o aplicando los requisitos de equilibrio a un elemento diferencial e integrando.
- Los aspectos tridimensionales del problema pueden manejarse utilizando notación vectorial o reduciendo el problema a tres problemas bidimensionales resolviendo todas las fuerzas y momentos en tres componentes.

Ejercicio 3.3: Analice el mecanismo de manivela mostrado en la figura. Obtenga los diagramas de fuerzas y momentos en el eje AD.



Ejercicio 3.3 (cont.): Diagramas de fuerzas de corte, momento flector y torque en el eje AD.



3.8 Comentarios finales Unidad 1

- La soluciones de los ejemplos tratados en esta segunda parte de la Unidad 1 se obtuvieron empleando las condiciones de equilibrio; es decir, es decir éstos consideraban situaciones estáticamente determinadas o isostáticas.
- En Unidades posteriores se analizarán elementos delgados estáticamente indeterminados. En esos casos, deberemos usar las condiciones de equilibrio, pero también debemos incluir los pasos 2 y 3.
- El modelo seleccionado se analizará basados en los principios de la mecánica, que incluye los siguientes **pasos para el análisis de cuerpos deformables**:
 - (1) **Estudio de fuerzas y requisitos de equilibrio.**
 - (2) **Estudio de deformación y condiciones de ajuste geométrico.**
 - (3) **Aplicación de las relaciones de fuerza-deformación.**
- Se obtendrán soluciones cumpliendo simultáneamente los requisitos de estos tres pasos.

Bibliografía



Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).

An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.



Russel C. Hibbeler (2011).

Mecánica de Materiales. 8va Ed. México, Pearson, 2011.

Fin

