

Mecánica de los Sólidos – Unidad 2C

Formulación Matemática de la Elasticidad Lineal

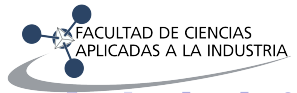
Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, septiembre de 2021



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



- 4 4. Deformación
 - 4.1 Análisis de deformación
 - 4.2 Definición de las componentes de deformación
 - 4.3 Relación entre deformación unitaria y desplazamiento para un estado plano de deformación
 - 4.4 Componentes de deformación para ejes arbitrarios
 - 4.5 Círculo de Mohr del estado plano de deformación unitaria
 - 4.6 Estado tridimensional de deformación
 - 4.7 Condiciones de compatibilidad entre las componentes del tensor de deformación 3D

4.1 Análisis de deformación

- Hasta ahora hemos considerado el equilibrio de fuerzas en un punto dentro de un cuerpo bajo tensión.
- Los resultados que hemos obtenido se basan únicamente en los requisitos de equilibrio y son igualmente ciertos para un cuerpo hipotéticamente “rígido” o para un cuerpo real que se deforma bajo la acción de esfuerzo.
- Nuestro interés son cuerpos reales (sólidos deformables) y, por lo tanto, además de establecer las condiciones impuestas para el equilibrio de fuerzas, *debemos determinar qué restricciones impone el requisito de compatibilidad geométrica sobre la deformación de un cuerpo continuo.*
- **Por deformación geoméricamente compatible, de un cuerpo continuo, nos referimos a aquella en la que no se crean vacíos en el cuerpo.**
- Esto es un problema relacionado con la geometría e independiente de los requisitos de equilibrio.

- Consideremos el cuerpo 3D de la Figura 1 que sufre un desplazamiento tal que el punto 1 va a 1', el punto 2 a 2', etc.

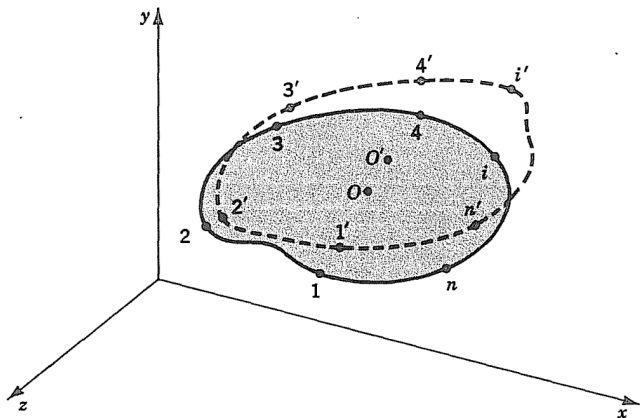


Figura 1: Desplazamiento de un cuerpo continuo.

- Si las partículas de un cuerpo continuo experimentan desplazamiento, podemos representar el desplazamiento de cada punto por vectores de desplazamiento $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_O$.

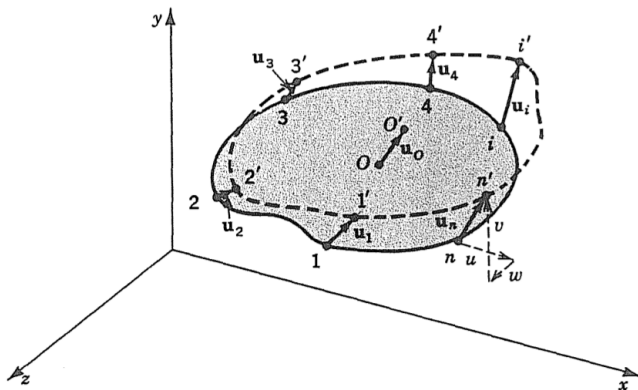


Figura 2: Vectores de desplazamiento de un cuerpo continuo.

- El vector de desplazamiento de cualquier punto puede considerarse como la suma de los desplazamientos de componentes paralelos a un conjunto de ejes de coordenadas adecuados; así, para el punto n de la Figura 2, podemos escribir

$$\mathbf{u}_n = u_n \mathbf{i} + v_n \mathbf{j} + w_n \mathbf{k},$$

donde u_n , v_n y w_n son los componentes xyz del desplazamiento del punto n .

- El desplazamiento de un cuerpo continuo puede considerarse como la suma de dos partes:
 - (1) una traslación y / o rotación del cuerpo como un todo, y
 - (2) un movimiento de los puntos del cuerpo uno respecto al otro.
- La traslación y rotación del cuerpo en su conjunto se denomina movimiento de cuerpo rígido.
- El movimiento de los puntos de un cuerpo entre sí se llama deformación.

- En la Figura 3(a) ilustramos una traslación de cuerpo rígido de un triángulo, que está obligado a moverse solo en el plano xy .

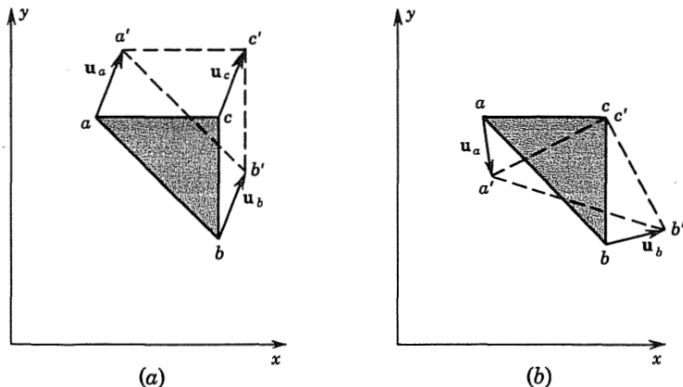


Figura 3: Movimiento de un sólido rígido. (a) Traslación. (b) Rotación alrededor de c .

- En la Figura 3(b) se muestra una rotación de cuerpo rígido alrededor de la esquina c .

- La Figura 4(c) ilustra un tipo de deformación sin movimiento de cuerpo rígido.

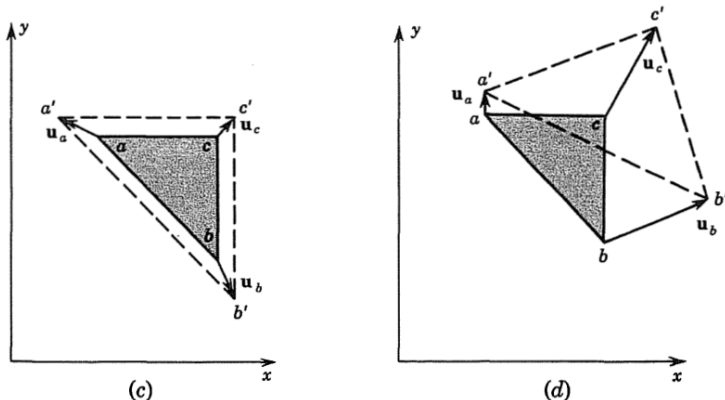


Figura 4: Deformación de un sólido en el plano xy . (c) Deformación sin movimiento de sólido rígido. (d) Suma de los desplazamientos de (a), (b), (c).

- El desplazamiento de la Figura 4(d) es el resultado de estos tres desplazamientos, como puede verificarse sumando los vectores de desplazamiento de (a), (b) y (c).

- Los desplazamientos asociados con el movimiento de cuerpo rígido pueden ser grandes o pequeños, mientras que los desplazamientos asociados con la deformación generalmente son pequeños.
- La descripción y el análisis del movimiento de cuerpo rígido es importante para la dinámica, donde son de interés las fuerzas requeridas para producir diferentes tasas de movimiento de cuerpo rígido.
- La descripción y el análisis de la deformación son importantes para el estudio de la mecánica de los cuerpos deformables, donde son de interés las fuerzas requeridas para producir diferentes distorsiones.
- Las secciones restantes de esta Unidad se dedicarán al estudio de la deformación en un punto de un cuerpo continuo.

4.2 Definición de las componentes de deformación

- Consideremos el caso de un cuerpo cuyas partículas se encuentran todas en el mismo plano y que solo se deforma en este plano.
- Este tipo de deformación se llama deformación plana.

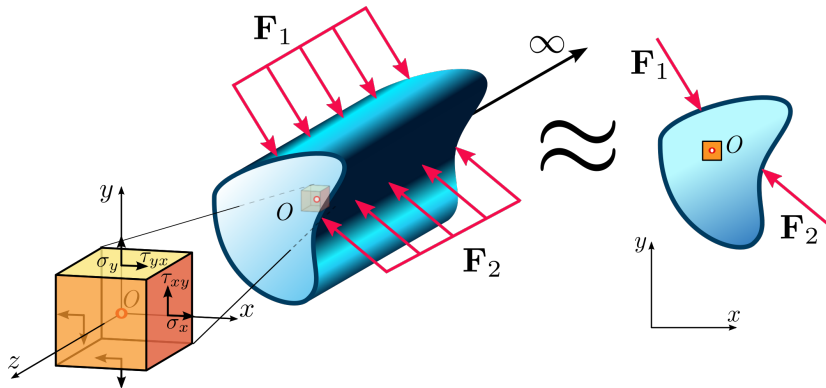


Figura 5: Estado de deformación plana.

- Sea un bloque de goma, Figura 6(a), que se deforma en su propio plano.

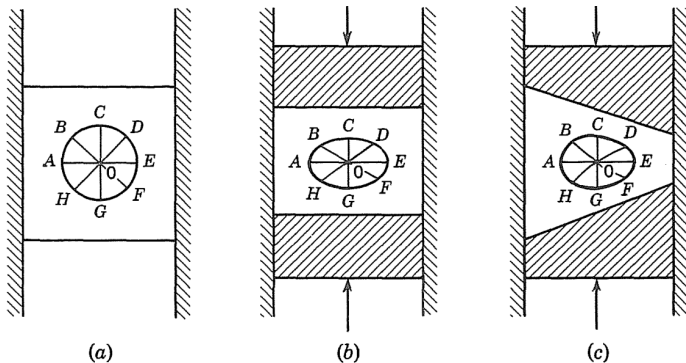


Figura 6: Dos ejemplos en los que un bloque de caucho se deforma en su propio plano.

- En la Figura 6(b), los elementos del bloque se han deformado en la misma cantidad, a esto se lo llama un **estado de deformación axial uniforme**. Además, las líneas rectas permanecen rectas en el estado deformado, aunque pueden haber cambiado su longitud o rotado.
- En la Figura 6(c), los elementos de la derecha se han deformado más que los de la izquierda; a esto se llama un **estado de deformación axial no uniforme**.

- Al examinar ahora el estado de deformación no uniforme de la Figura 6(c), observamos que las líneas originalmente rectas no son necesariamente rectas en el estado deformado.
- Evidentemente, una línea puede permanecer recta, sin rotar y sin cambios de longitud, como la línea AE ; \bullet puede permanecer recta, sin girar, pero cambiar su longitud, como la línea CG ; \bullet puede convertirse en una curva continua cuya longitud puede o no ser igual a la longitud original, como las líneas BF y DH .
- En una escala macroscópica, entonces, la deformación en deformación axial no uniforme puede ser considerablemente más complicada que en el caso de deformación axial uniforme.
- Sin embargo, al observar la deformación de una porción suficientemente pequeña de la Figura 6(c), digamos un área pequeña centrada en O , se tiene que sobre esta pequeña área las *líneas curvas BF y DH* pueden ser reemplazadas por sus *rectas tangentes*, y que la deformación del área pequeña es entonces similar a la de la Figura 6(b); es decir, dentro de esta pequeña área la deformación es aproximadamente uniforme.
- En el límite, cuando el área pequeña centrada en O se contrae a cero, esta deformación uniforme se convierte en la deformación en el punto O .

Deformation... in engineering [wikipedia]

- *Deformation* refers to the change in size or shape of an object.
 - *Displacements* are the *absolute* change in position of a point on the object.
 - *Deflection* is the relative change in external displacements on an object.
 - *Strain* is the *relative* internal change in shape of an infinitesimally small cube of material and can be expressed as a non-dimensional change in length or angle of distortion of the cube.
 - Strains are related to the forces acting on the cube, which are known as *stress*, by a *stress-strain curve*.
- The relationship between stress and strain is generally linear and reversible up until the *yield point* and the deformation is *elastic*. The linear relationship for a material is known as *Young's modulus*.
 - Above the *yield point*, some degree of permanent distortion remains after unloading and is termed *plastic deformation*.

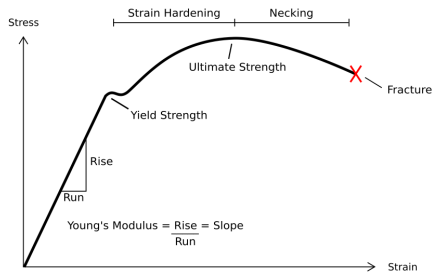


Figura 7: Typical stress versus strain diagram indicating the various stages of deformation.

- The determination of the stress and strain throughout a solid object is given by the field of *strength of materials* and for a structure by *structural analysis*.
- **Engineering stress** and **engineering strain** are approximations to the internal state that may be determined from the external forces and deformations of an object, provided that there is no significant change in size.
- When there is a significant change in size, the **true stress** and **true strain** can be derived from the instantaneous size of the object. True stress is the stress determined by the instantaneous load acting on the instantaneous cross-sectional area. Check: [engineering-stress-strain-vs-true-stress-strain](#).

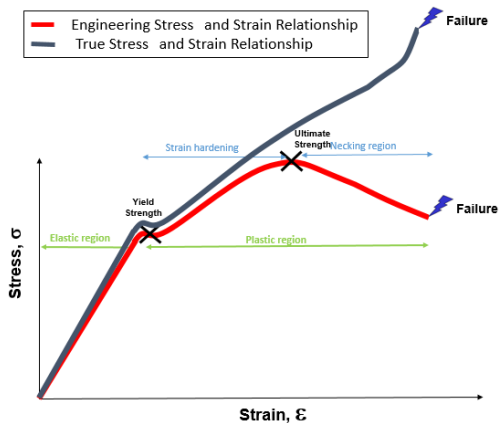


Figura 8: Engineering stress-strain vs true stress-strain.

- Ahora consideremos un cuerpo delgado y continuo que se encuentra completamente en el plano xy y que sufre una *pequeña* deformación geoméricamente compatible en el plano xy .

- Si estudiamos un elemento pequeño del cuerpo, Figura 9, podemos considerar que este elemento está deformado en un estado de deformación axial uniforme.

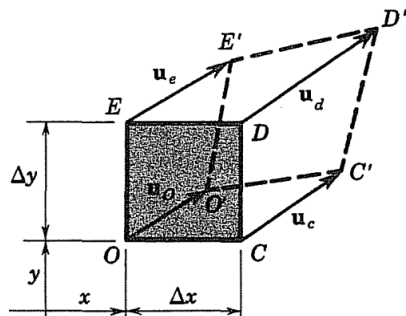


Figura 9: Deformación en el plano xy de un pequeño elemento de un cuerpo continuo.

- Para el elemento deformado en la Figura 9, expresemos la deformación en la vecindad del punto O cuantitativamente dando los cambios en la longitud de las dos líneas \overline{OC} y \overline{OE} y la rotación de estas líneas entre sí.

- Encontraremos conveniente definir cantidades adimensionales que describan estos dos aspectos de la deformación.
 - (1) Medida del alargamiento o contracción de una línea, se llama componente de *deformación unitaria (axial) normal*.
 - (2) Medida de la rotación relativa de dos líneas, se denomina componente de *deformación unitaria cortante* [vídeo].
- El componente de *deformación unitaria normal* se define como el cambio incremental en la longitud original de una línea y se designa con el símbolo ε .
- Por lo tanto, los valores de ε_x y ε_y en el punto O de la Figura 9 son

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{O'C'} - \overline{OC}}{\overline{OC}}, \quad \varepsilon_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\overline{O'E'} - \overline{OE}}{\overline{OE}}.$$

siendo la deformación unitaria normal positiva cuando la línea se alarga y negativa cuando la línea se contrae.

- La *deformación unitaria cortante* se especifica con respecto a los ejes que son perpendiculares en el cuerpo no deformado y está designado por el símbolo γ_{xy} .
- La deformación unitaria cortante puede definirse como la tangente del cambio de ángulo entre estos dos ejes originalmente perpendiculares.
- Para la deformación ilustrada en la Figura 9, la deformación unitaria cortante γ_{xy} es positiva.
- Para deformaciones unitarias cortantes pequeñas, en ingeniería menores a 0.01, es adecuado definir ésta en términos del cambio en el ángulo (en radianes) en lugar de en términos de la tangente de este cambio de ángulo. $\leftrightarrow \tan \epsilon = \epsilon \mid \epsilon \ll 1$.
- La deformación de corte en el punto O es

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\widehat{COE} - \widehat{C'O'E'}) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{C'O'E'} \right).$$

4.3 Relación entre deformación unitaria y desplazamiento para un estado plano de deformación

- Sea u el desplazamiento en la dirección x del punto O , ver Figura 10, y v el desplazamiento en la dirección y , podemos expresar el vector de desplazamiento del punto O como

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}.$$

- Los componentes de desplazamiento u y v deben ser funciones continuas de x e y para garantizar que el desplazamiento sea geoméricamente compatible, es decir, para garantizar que el desplazamiento no cree huecos ni agujeros.

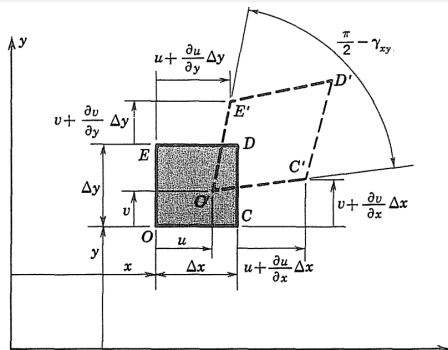


Figura 10: Estado plano de deformación unitaria expresada en términos de las componentes u y v y sus derivadas parciales.

- Expresamos los desplazamientos de los puntos E y C en términos de los desplazamientos u y v del punto O y sus derivadas parciales.
- Usando las definiciones previamente establecidas, obtenemos las siguientes relaciones de la Figura 10, bajo el supuesto de que las deformaciones unitarias son pequeñas en comparación con la unidad.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overline{O'C'} - \overline{OC}}{\overline{OC}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x] - \Delta x}{\Delta x} = \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}}, \\
 \varepsilon_y &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\overline{O'E'} - \overline{OE}}{\overline{OE}} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[\Delta y + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y] - \Delta y}{\Delta y} = \boxed{\frac{\partial v}{\partial y}}, \\
 \gamma_{xy} &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{C'O'E'} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x}{\Delta x} - \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y}{\Delta y} \right) \right\} \\
 &= \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

- Como podemos deducir se tiene que no todo el desplazamiento relativo implica deformación. Es decir, una parte del desplazamiento relativo surge de la rotación del cuerpo rígido.
- Para derivadas de un desplazamiento pequeño, la rotación alrededor del eje z de la línea \overline{OC} (C.C.W.), por ejemplo, es

$$(\omega_z)_{\overline{OC}} = \frac{[v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x] - v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Del mismo modo, la rotación sobre el eje z de la línea \overline{OE} (C.W.), es

$$(\omega_z)_{\overline{OE}} = \frac{-[u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y] + u}{\Delta y} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

- Se define la rotación promedio (pequeña) del elemento, como un todo, como el promedio de las rotaciones de los dos segmentos perpendiculares de línea

$$\omega_z = \frac{1}{2} [(\omega_z)_{\overline{OC}} + (\omega_z)_{\overline{OE}}] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (4.2)$$

- Los componentes de la deformación unitaria en términos de los derivadas de desplazamiento se pueden resumir de la siguiente manera:

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}}, \quad \boxed{\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}}, \quad \boxed{\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}. \quad (4.3)$$

- Los componentes de deformación unitaria dependen *linealmente* de las derivadas de los componentes de desplazamiento.
- La derivación desarrollada, para las deformaciones normales y de corte, es válida bajo el *supuesto de pequeñas derivadas de desplazamiento en comparación con la unidad*.
- La derivación anterior remarca el significado geométrico de los componentes de deformación.
- Las componentes de la deformación unitaria de la Ec. (4.3), se entienden bajo *deformaciones unitarias pequeñas y rotaciones pequeñas*, en comparación con la unidad, siendo ambas del mismo orden de magnitud.
- Si se debe trabajar en una situación en la que las grandes deformaciones son importantes, entonces se requiere un conjunto de relaciones de deformación–desplazamiento no lineal. La derivación de las relaciones no lineales generalmente procede de una manera diferente de la dada anteriormente.

- Dado que hemos considerado la deformación del elemento que se muestra en la Figura 10 en el caso límite cuando su tamaño tiende a cero, hemos supuesto que los componentes de la deformación unitaria definen la deformación en el punto O .
- Por lo tanto, hablamos del estado de deformación plana (*plane strain*) en un punto dado de un cuerpo bidimensional, dado por los componentes de deformación

$$\begin{array}{cc} \varepsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{array} \quad (4.4)$$

donde $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$.

- La deformación unitaria en los puntos adyacentes al punto O en general diferirá de la del punto O .
- El hecho de que dos componentes del desplazamiento sirvan para definir tres componentes de la deformación unitaria, indica que los tres componentes de la deformación unitaria no pueden variar arbitrariamente en un campo de deformación unitaria no uniforme.
- Las condiciones que aseguran que se encontrará un valor único para el desplazamiento, en cualquier punto a partir del conocimiento de las deformaciones, se denominan condiciones de compatibilidad de *Saint-Venant*.

- Si ahora pasamos a la **notación indicial**, de forma similar a como procedimos con las componentes del tensor tensión de Cauchy, entonces, es posible escribir las expresiones de la Ec. (4.3) como

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (4.5)$$

- Es decir, podemos escribir los componentes de deformación de manera minimalista como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (4.6)$$

donde

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{22} \quad \text{y} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21}.$$

- **Ejemplo 4.1:** derivación de la condición de compatibilidad 2D de *Saint–Venant*. Mostrar que mediante la diferenciación repetida de las relaciones dadas en la Ec. (4.6), permite eliminar los desplazamientos u_1 y u_2 , dando la condición de compatibilidad bidimensional para las deformaciones

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 0. \quad (4.7)$$

- Procedemos realizando las siguientes derivaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (a)$$

- **Ejemplo 4.1:** (*cont.*)

- Desarrollamos las expresiones en (a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right).\end{aligned}\tag{b}$$

- Combinando las 3 expresiones dadas en (b)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} \right),\tag{c}$$

obteniendo, mediante una simple manipulación algebraica de (c), la condición de compatibilidad bidimensional deseada.

Tensor de deformaciones 2D

- Consideremos un elemento unitario $\overrightarrow{OD} = \mathbf{n}$, de cosenos directores (l, m) .

- Se define como deformación δ del elemento \overrightarrow{OD} al desplazamiento $\overrightarrow{DD'}$ del punto D , originado por la deformación del elemento rectangular diferencial de área de dimensiones l y m , que tenga a \overrightarrow{OD} por diagonal, prescindiendo de rotaciones y traslaciones de sólido rígido. Ver Figura 11.

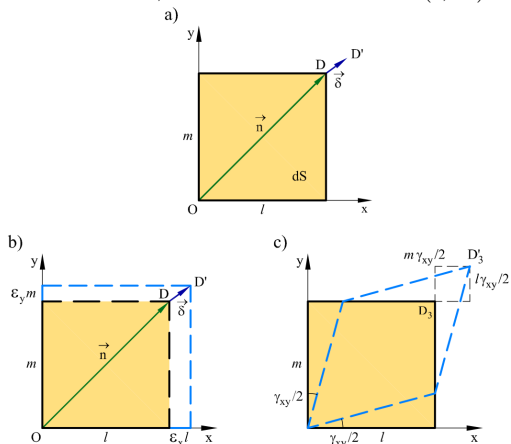


Figura 11: Estado plano de deformación: a) Vector deformación. b) Desplazamientos debidos a los alargamientos. c) Desplazamientos debidos a las distorsiones

- Calculamos a continuación las componentes cartesianas del vector $\boldsymbol{\delta}$, es decir (δ_x, δ_y) .
- Para ello, sumamos las componentes del desplazamiento del punto D debidas a los alargamientos unitarios ε_x , ε_y y a la distorsión γ_{xy} (Figura 11b) y c).

$$\delta_x = \varepsilon_x l + \frac{\gamma_{xy}}{2} m,$$

$$\delta_y = \frac{\gamma_{xy}}{2} l + \varepsilon_y m,$$

o matricialmente

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}, \quad (4.8)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de deformaciones que es igual a

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

- El tensor de deformaciones es simétrico, al haber prescindido en su construcción de las rotaciones de sólido rígido.

Resumen

- En un problema plano en el que se producen las componentes de desplazamiento $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en las direcciones x, y , respectivamente, hay tres deformaciones unitarias independientes, dos longitudinales y una angular, expresadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

- Las relaciones entre las deformaciones unitarias y los desplazamientos se basan en la hipótesis de que los desplazamientos y sus gradientes (*deformaciones unitarias*) son pequeños

$$\|\mathbf{u}\| \ll 1, \quad \|\nabla \mathbf{u}\| \ll 1. \quad (\text{principio de rigidez})$$

- Para poder resolver el problema inverso, es decir, para poder hallar los desplazamientos u, v dadas $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, éstas deben cumplir la ecuación de compatibilidad de Saint-Venant

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0.$$

- **Ejemplo 4.2:** Una placa rectangular $DABC$ se deforma siendo su deformada la $D'A'B'C'$, según se indica en la Figura 12.

- Sabiendo que en la placa se crea un **estado tensional homogéneo**, se pide:
 - 1) Calcular la matriz de deformación en los puntos de la placa.
 - 2) Hallar las deformaciones y direcciones principales.

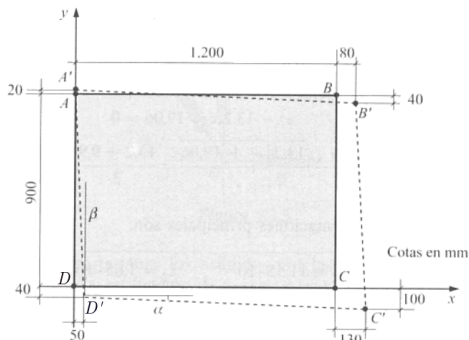


Figura 12: Ejemplo 4.2.

- 1) De la figura se deducen fácilmente los valores de los alargamientos longitudinales unitarios en las direcciones de los ejes x e y

$$\varepsilon_x = \frac{(1200 + 80) - 1200}{1200} = \frac{(1200 + 130 - 50) - 1200}{1200} = \frac{8}{120} = 66.67 \times 10^{-3},$$

$$\varepsilon_y = \frac{(900 + 100 - 40) - 900}{900} = \frac{(900 + 40 + 20) - 900}{900} = \frac{6}{90} = 66.67 \times 10^{-3}.$$

● **Ejemplo 4.2:** (cont.)

- El valor de γ_{xy} es la suma de las variaciones angulares de las aristas paralelas a los ejes

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{60}{1200 + 80} = 46.875 \times 10^{-3} \\ \beta &= \frac{50}{900 + 60} = 52.083 \times 10^{-3} \end{aligned} \right\} \gamma_{xy} = -(\alpha + \beta) = -98.958 \times 10^{-3}$$

donde γ_{xy} es negativo ya que el ángulo principal recto aumenta en la deformación.

- Estos valores de deformaciones unitarias son válidos para todos los puntos de la placa. Por lo tanto, el **tensor de deformación plana homogéneo** en cualquier punto de ella, será

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.67 & -4.95 \\ -4.95 & 6.67 \end{bmatrix} \times 10^{-2}.$$

- **Ejemplo 4.2:** (*cont.*)

2) Las deformaciones principales son las raíces de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 6.67 - \varepsilon & -4.95 \\ 4.95 & 6.67 - \varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon^2 - 13.2\varepsilon + 19.06,$$

por lo tanto las deformaciones principales son

$$\varepsilon_1 = 11.55 \times 10^{-2}, \quad \varepsilon_2 = 1.65 \times 10^{-2}.$$

– Las direcciones principales serán

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir bisectrices de los ejes coordenadas.

4.4 Componentes de deformación para ejes arbitrarios

- En esta sección examinamos más a fondo el problema de la compatibilidad geométrica en un punto y determinamos las relaciones que deben existir entre los componentes de deformación asociados con la transformación del sistema coordenado de referencia.
- Análogamente a lo desarrollado en el análisis de la Figura 10, que nos permitió obtener las Ecs. (4.1), las componentes de deformación unitaria en un sistema x' e y' pueden ser expresadas en términos de las derivadas de los desplazamientos u' y v' , como

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'}, \quad \varepsilon_{y'} = \frac{\partial v'}{\partial y'}, \quad \gamma_{x'y'} = \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'}. \quad (4.10)$$

- Observemos esta situación ilustrada en la Figura 13 mostrada a continuación.

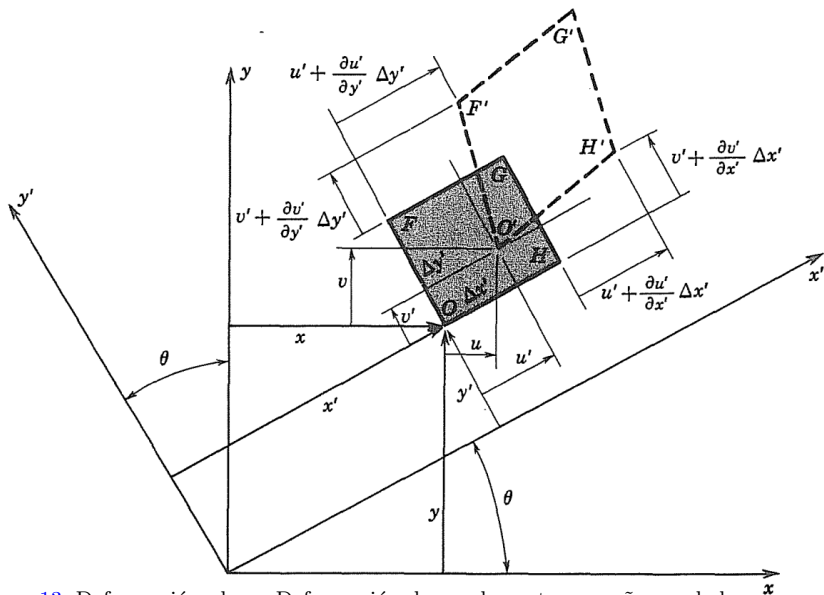


Figura 13: Deformación plana. Deformación de un elemento pequeño con lados originalmente paralelos al conjunto de ejes x' e y' .

- Por lo tanto nos interesa determinar la naturaleza de la relación entre $\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$ y $\gamma_{x'y'}$ de las Ecs (4.10) y ε_x , ε_y y γ_{xy} de las Ecs. (4.3).
- Observamos que, dado que la compatibilidad geométrica requiere que u' y v' en la Figura 13 de sean funciones continuas de posición en el plano, podemos expresar estas componentes de desplazamiento bien como funciones de x' e y' o bien como funciones de x e y .
- Si expresamos u' y v' como funciones de x e y , y si recordamos la regla de la cadena para derivadas parciales, podemos escribir los componentes de la deformación dadas por las Ecs. (4.10) como sigue:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'}, \\ \varepsilon_{y'} &= \frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'}, \\ \gamma_{x'y'} &= \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} = \left(\frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} \right) + \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} \right).\end{aligned}\tag{4.11}$$

- Analizando la Figura 13 es posible determinar las relaciones geométricas

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta, \\ u' &= u \cos \theta + v \sin \theta, \\ v' &= -u \sin \theta + v \cos \theta.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Ejercicio 4.1: Sustituyendo las Ecs. (4.12) en las Ecs. (4.10):

- Mostrar que el estado plano de deformación asociado con diferentes conjuntos de ejes perpendiculares, en deformación plana, se expresa como

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'} &= \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \varepsilon_{y'} &= \varepsilon_x \sin^2 \theta + \varepsilon_y \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{\gamma_{x'y'}}{2} &= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).\end{aligned}\tag{4.13}$$

- Cuya representación circular en el diagrama de Mohr es

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta, \\ \varepsilon_{y'} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta, \\ \frac{\gamma_{x'y'}}{2} &= -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Las Ecs. (4.14) definen las condiciones que la compatibilidad geométrica impone a los componentes de deformación asociados con diferentes conjuntos de ejes perpendiculares en deformación plana:

Si se especifican los componentes de deformación $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ y el ángulo θ , los componentes de deformación $\varepsilon_{x'}, \varepsilon_{y'}, \gamma_{x'y'}$ están completamente determinados.

- Análogamente a lo desarrollado para el tensor de tensiones (Unidad 2B), en un estado plano el tensor de deformación se transforma al girar el sistema de referencia x, y que pasa a ser $x' y'$ Figura 14.
- Sea \mathbf{A} la matriz de los cosenos directores

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \cos(x'x) & \cos(x'y) \\ \cos(y'x) & \cos(y'y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

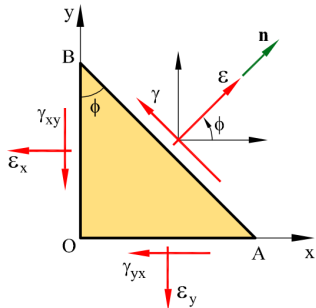


Figura 14: Deformaciones según una dirección arbitraria \mathbf{n} .

- Sea ϵ el tensor de deformaciones referido al sistema x, y .
- La expresión que permite obtener el tensor de deformaciones ϵ' referido al sistema de referencia x', y' , es:

$$\epsilon'_{ij} = a_{im} a_{jn} \epsilon_{mn} \quad \text{ó} \quad \epsilon' = \mathbf{A} \epsilon \mathbf{A}^T,$$

donde \mathbf{A} es una matriz de rotación (ortogonal).

4.5 Círculo de Mohr del estado plano de deformación unitaria

- Si observamos las expresiones para la tensión y para la deformación expresadas en función del ángulo doble, vemos que son similares si sustituimos ε por σ y $\gamma/2$ por τ . Lo cual nos lleva a emplear el círculo de Mohr para representar un estado plano de deformación.
- De la misma forma que en el caso del tensor de tensión es posible para el tensor de deformación unitaria determinar ejes principales de deformación, deformaciones principales ε_1 y ε_2 , máxima deformación de corte $\gamma_{\text{máx}}$, etc.
- **Ojo con las nomenclaturas**, existen similitudes y diferencias importantes, por ejemplo consideremos las siguientes deformaciones unitarias

$$\begin{array}{lll}
 \varepsilon_x, & \varepsilon_y, & \gamma_{xy}, \\
 \parallel & \parallel & \parallel \\
 \varepsilon_{11}, & \varepsilon_{22}, & 2\varepsilon_{12}, \\
 \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \gamma_{\text{máx}} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \leftarrow \text{ver círculo de Mohr.}
 \end{array}$$

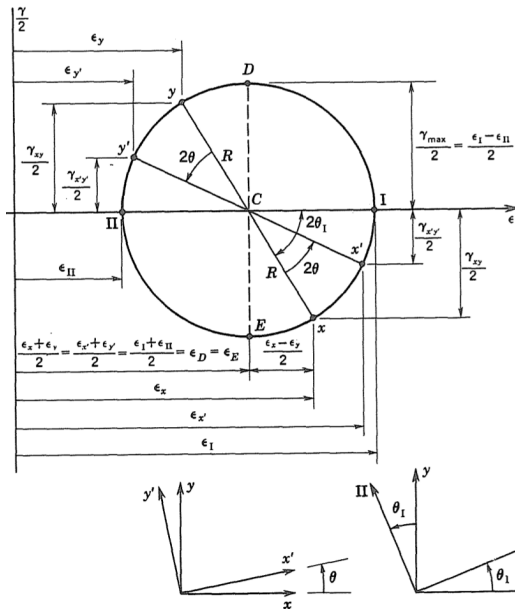


Figura 15: Círculo de Mohr para deformación unitaria plana.

Ejercicio 4.2: Empleando el círculo de Mohr resuelva nuevamente el Ejemplo 4.2 de una placa rectangular $DABC$, la cual se deforma siendo su deformada la $D'A'B'C'$, según se indica en la Figura 12.

Ejercicio 4.3: Un campo plano de deformaciones viene dado por: $\varepsilon_x = 8x$; $\varepsilon_y = x$; $\gamma_{xy} = y$. Comprobar que se cumple la ecuación de compatibilidad, Ec. (4.7), y hallar el campo de desplazamientos, ver [Cervera, 2015], pág. 26.

Ejercicio 4.4: En el punto O de un sólido bidimensional se tienen las deformaciones $\varepsilon_x = 4.2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_y = 3.0 \times 10^{-3}$ y $\gamma_{xy} = 6.0 \times 10^{-3}$. Se pide calcular los alargamientos unitarios principales y la distorsión máxima, $\gamma_{\text{máx}}$, ver [Cervera, 2015], pág. 34.

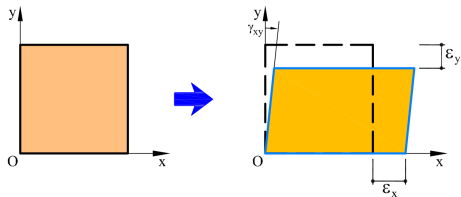


Figura 16: Ejercicio 4.4.

4.6 Estado tridimensional de deformación

- En un problema tridimensional en el que aparecen las componentes de desplazamiento $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ y $w(x, y, z)$ en las direcciones x , y , z respectivamente, hay seis deformaciones unitarias independientes, tres longitudinales y tres angulares, expresadas por:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

- Las relaciones tridimensionales entre las deformaciones unitarias y los desplazamientos se basan en la hipótesis de que los desplazamientos y las deformaciones son pequeños (principio de rigidez).

- En estas condiciones, la deformación $\boldsymbol{\delta} = (\delta_x, \delta_y, \delta_z)^T$ de un elemento $\overrightarrow{OD} = \mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ se calcula de forma análoga al caso de deformación plana.
- Matricialmente se tiene:

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n},$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de deformaciones 3D que es igual a

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

- El tensor de deformación es simétrico, al haber prescindido en su construcción de las rotaciones de sólido rígido.
- Al ser el tensor de deformación simétrico, existen siempre tres direcciones ortogonales entre sí en las cuales la deformación es exclusivamente longitudinal. Son las llamadas direcciones principales de deformación.
- Expresado en las direcciones principales el tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ es diagonal.

- **Ejemplo 4.3:** Sobre un bloque paralelepípedo cuyas longitudes de las aristas verifican la relación $a = 3, b = 4, c = 5$ actúa una sollicitación que lo deforma de tal manera que sus caras siguen siendo normales entre sí. Se sabe que en todo punto las deformaciones longitudinales unitarias en las direcciones de las aristas son $5 \times 10^{-3}, 4 \times 10^{-3}$ y -3×10^{-3} respectivamente.

Calcular:

- 1) La deformación longitudinal unitaria experimentada por la diagonal \overline{OD} , ε_n .
 - 2) La deformación unitaria longitudinal en z , necesaria para que no se experimente deformación longitudinal unitaria experimentada a lo largo de la diagonal \overline{OD} , es decir $\varepsilon_n = 0$.
- Dado que las caras siguen siendo normales entre sí, las direcciones de las aristas son direcciones principales y el tensor ε es diagonal. Tomaremos como sistema de referencia el O_{xyz} , ver Figura 17.

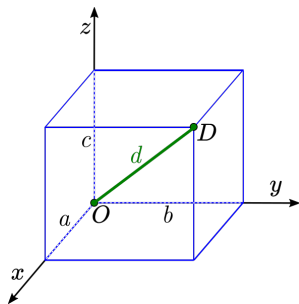


Figura 17: Ejemplo 4.3.

● **Ejemplo 4.3:** (cont.)

- Para una determinada dirección definida por $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ la deformación longitudinal unitaria está dada por la expresión

$$\varepsilon_n = \mathbf{n}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n} = n_x^2 \varepsilon_1 + n_y^2 \varepsilon_2 + n_z^2 \varepsilon_3.$$

- De los datos del enunciado del problema se tiene $b/a = 4/3$ y $c/a = 5/3$, siendo la longitud de la diagonal del paralelepípedo d dada como

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + \left(\frac{4a}{3}\right)^2 + \left(\frac{5a}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}a^2.$$

- El vector \mathbf{n} tiene la dirección de la diagonal del paralelepípedo, por lo tanto se tiene

$$n_x^2 = \left(\frac{a}{d}\right)^2, \quad n_y^2 = \left(\frac{b}{d}\right)^2, \quad n_z^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2.$$

- Finalmente, sustituyendo los valores anteriores en la expresión de ε_n obtenemos

$$1) \quad \varepsilon_n = 5 \times 10^{-3} \frac{9}{50} + 4 \times 10^{-3} \frac{16}{50} - 3 \times 10^{-3} \frac{25}{50} = 6.8 \times 10^{-4}.$$

$$2) \quad \varepsilon_3 = -5 \times 10^{-3} \frac{9}{25} - 4 \times 10^{-3} \frac{16}{25} = -4.36 \times 10^{-3}.$$

4.7 Condiciones de compatibilidad entre las componentes del tensor de deformación 3D

- Sea un sólido elástico referido a un sistema cartesiano ortogonal O_{xyz} , si conocemos el desplazamiento \mathbf{u} de todos los puntos del mismo es evidente que podemos calcular de forma inmediata la matriz de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$, sin más que derivar sus componentes, de acuerdo con las ecuaciones de definición.
- Sin embargo, no existe esta evidencia cuando se trata de la proposición recíproca, es decir, dada una matriz de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ arbitraria no se puede asegurar que se puedan deducir de ella las funciones u, v y w .
- De las Ecs. (4.15) observamos que el estado 3D de deformación está compuesto de seis ecuaciones con tres incógnitas. Es entonces evidente que las componentes de la matriz $\boldsymbol{\varepsilon}$ no pueden ser arbitrarias.

- Las condiciones necesarias y suficientes que tienen que verificar las componentes de la matriz de deformación 3D, para que ésta pueda representar un estado deformacional físicamente posible son

$$\begin{aligned}
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right), \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right), \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}, \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}, \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Bibliografía



Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).

An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.



Cervera, Miguel; Elena Blanco (2015).

Resistencia de Materiales. CIMNE, 2015.

Fin

