

# Mecánica de los Sólidos – Unidad 3A

## Relaciones tensión–deformación–temperatura

Profesor Titular Daniel Millán  
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo  
[dmillan@fcai.uncu.edu.ar](mailto:dmillan@fcai.uncu.edu.ar)

San Rafael–Argentina, septiembre de 2021



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



- 1 1. Relaciones tensión-deformación-temperatura
  - 1.1 Ensayo de tracción
  - 1.2 Idealización de las curvas tensión-deformación
  - 1.3 Relaciones constitutivas elástico lineales
  - 1.4 Ley de Hooke generalizada
  - 1.5 Deformaciones térmicas

# Trabajos para desarrollar el “Reporte Técnico”

- Al final de esta Unidad se estará en condiciones de discutir el comportamiento plástico y viscoelástico y se establecer modelos matemáticos para describir la elasticidad y la plasticidad.
  - Concentración de estrés.
  - Materiales compuestos y elasticidad anisotrópica.
  - Criterios de plastificación (*initial yielding*).
  - Comportamiento más allá de la fluencia en el ensayo de tracción.
  - Fractura de probetas y estructuras dúctiles.
  - Fractura de muestras y estructuras frágiles.
  - Fatiga.
  - Tensión-deformación plástica equivalente.
  - Relaciones tensión-deformación del plástico.
  - Viscoelasticidad.
- Se describirá y darán criterios de diseño así como ejemplos para fluencia de materiales dúctiles, fractura de materiales frágiles y fatiga bajo cargas repetidas.
- El objetivo es dar una introducción a aspectos del comportamiento de materiales que son importantes para las aplicaciones de ingeniería.

# 1. Relaciones tensión-deformación-temperatura

- Anteriormente desarrollamos por separado las ideas de tensión y deformación en un punto, utilizando solo la geometría y los conceptos físicos de equilibrio de fuerzas y la continuidad del desplazamiento. No se ha especificado la naturaleza del material.
- Para determinar las distribuciones de tensión y deformación en un cuerpo se necesitan relaciones adicionales, que permitan vincular las componentes del tensor de tensión y el tensor de deformación.
- Es decir, la distribución del estrés y de la deformación dependen del comportamiento material del cuerpo bajo estudio.
- En este capítulo nos ocuparemos de las relaciones entre la tensión y la deformación.
- Se sugieren dos vías de enfoque:
  - (1) relaciones basadas en evidencia experimental a nivel atómico con extensión teórica al nivel macroscópico o,
  - (2) relaciones basadas en evidencia experimental a nivel macroscópico.

- Aunque ha habido mucho progreso en la física de sólidos durante las últimas décadas, no es posible obtener la información cuantitativa requerida por los ingenieros a partir de datos atómicos en muchas situaciones de interés práctico.
- Por lo tanto, el empleo de datos experimentales a nivel macroscópico, permite obtener las relaciones de tensión-deformación generalizando estos datos con la ayuda de argumentos físicos y matemáticos.
- En este capítulo se describe el comportamiento de tensión-deformación de una amplia variedad de materiales estructurales, incluidos metales, madera, polímeros y materiales compuestos.
- Se desarrollará en detalle la **teoría de la elasticidad isotrópica lineal**.

# 1.1 Ensayo de tracción

- Como en otras ramas de la ciencia, se desea desarrollar una teoría que permita predecir el comportamiento de una situación general a partir de los resultados de un experimento realizado en una situación muy simple.
- La carga más simple que podemos imaginar es aquella en la que se tira de un miembro relativamente delgado en la dirección de su eje, ver Figura 1.

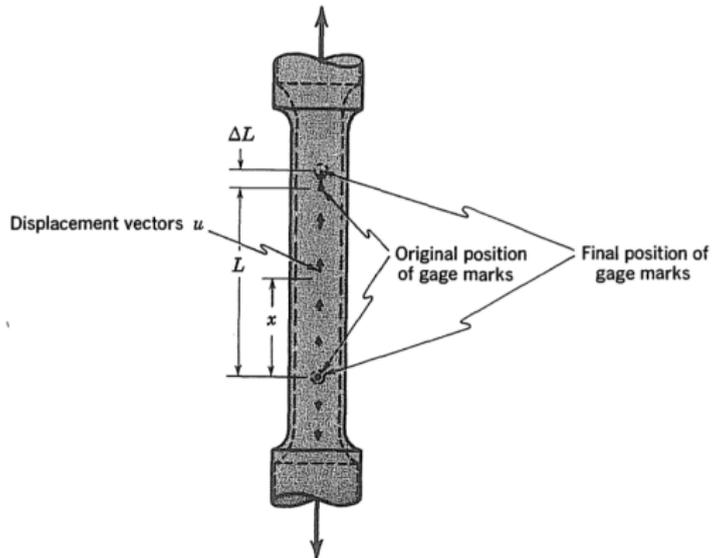


Figura 1: Desplazamiento en un ensayo de tracción.

- Por lo general, el único componente de deformación registrado en una prueba de tracción es el componente axial normal.
- Si los desplazamientos varían uniformemente sobre la longitud del calibre  $L$ , se puede escribir

$$u = \frac{x}{L} \Delta L.$$

- Para pequeñas deformaciones, de la definición de deformación

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta L}{L}.$$

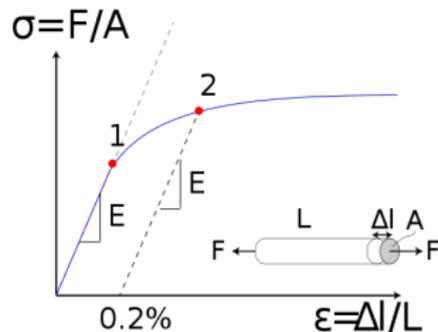
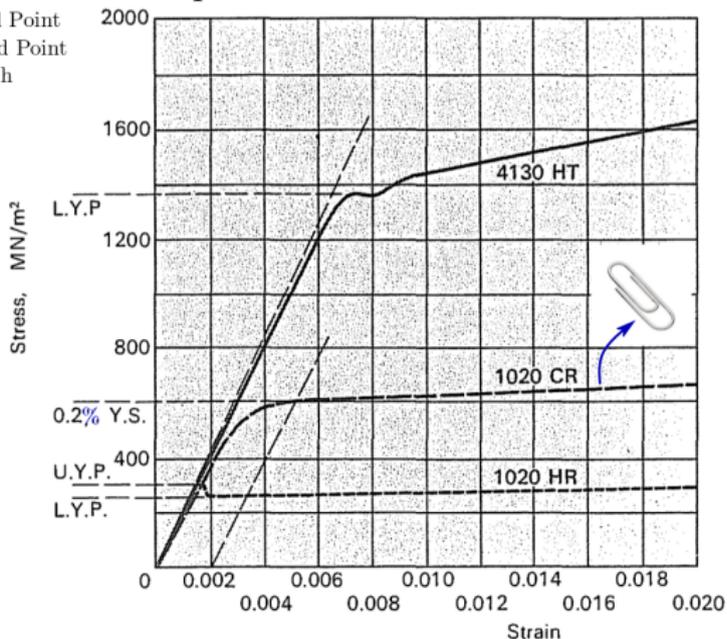


Figura 2: Tensión-deformación bajo carga axial.

● Curvas de tensión-deformación para tres aceros.

LYP: Lower Yield Point  
 UYP: Upper Yield Point  
 YS: Yield Strength



Stress-strain curves for three steels.

----- Mild steel, hot-rolled (1020 HR)

— — Mild steel, cold-rolled (1020 CR)

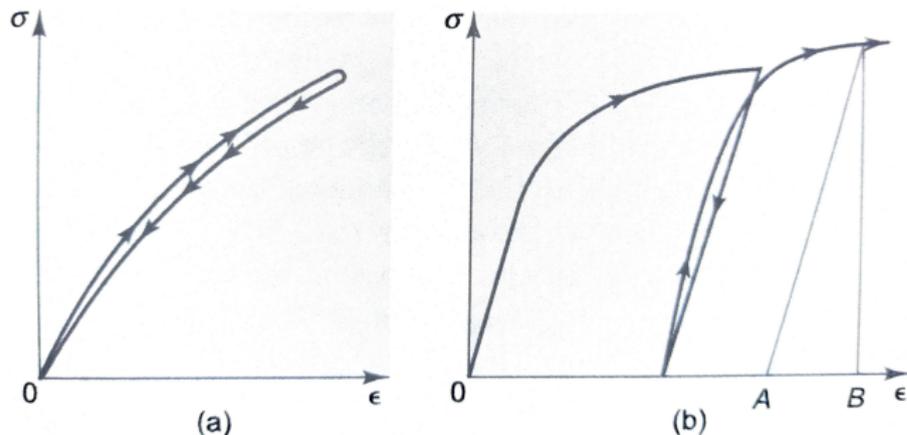
—— 0.3% C, 0.5% Mn, 0.25% Si, 0.9% Cr, balance Fe (4130 HT)

Heat treatment: Oil quenched from 870°C, tempered at 315°C

**Ejercicio 1.1:** describa UYP vs LYP.

Ver <https://www.britannica.com/science/yield-point>.

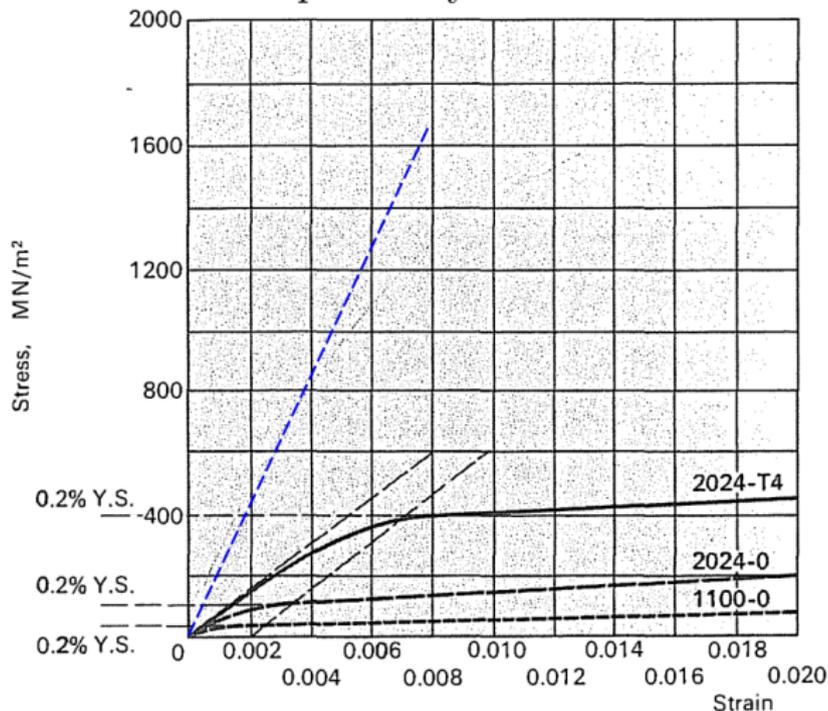
- Efecto de descarga y nueva carga. (a) Elástica. (b) Plástica.



- En (a) se representa el comportamiento de un material elástico sometido a carga y descarga, con tensiones mayores que el *límite de proporcionalidad*.
- Si la tensión crece por encima del *límite elástico* y después se suprime, se observará que la curva de tensión-deformación unitaria tendrá la forma representada en (b).
- La deformación unitaria total  $OB$  consta de una parte elástica  $AB$  y otra plástica  $OA$ .

- Ni los límites proporcionales ni los elásticos pueden determinarse con precisión, ya que se refieren a los casos límite de desviación cero de la linealidad y de estabilidad no permanente.
- Dado que las deformaciones plásticas del orden de las deformaciones elásticas a menudo no son importantes, en lugar de informar el límite elástico se ha convertido en una práctica estándar informar una cantidad llamada *límite de fluencia (yield strength)*, que es la tensión requerida para producir una determinada deformación plástica arbitraria.
- El límite de fluencia se determina dibujando a través del punto en la abscisa correspondiente a la deformación plástica arbitraria, generalmente **0.2 %**, una línea que es paralela a la tangente inicial de la curva tensión-deformación; la intersección de esta línea con la curva tensión-deformación define el límite de fluencia.
- Debido al método de determinación, estos límites de fluencia se definen con mayor precisión que los límites proporcionales.

- Curvas de tensión-deformación para Al y dos aleaciones de Al.

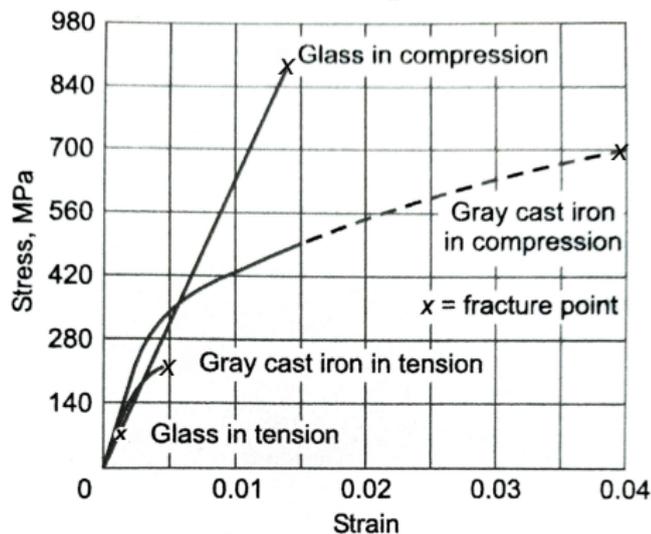


Stress-strain curves for aluminum and two aluminum alloys.

- Commercially pure aluminum, annealed (1100-0)
- · - 4.6% Cu, 1.5% Mg, 0.7% Mn, balance Al, annealed (2024-0)
- 4.6% Cu, 1.5% Mg, 0.7% Mn, balance Al (2024-T4)

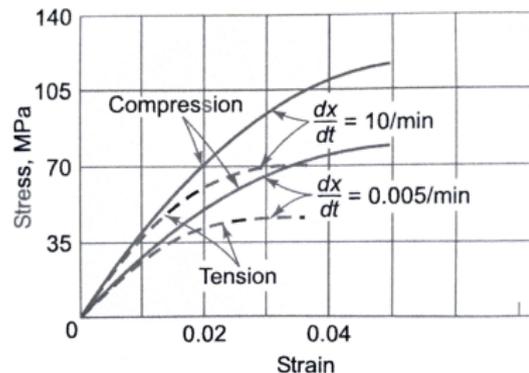
Water quenched from 490°C, aged 24 hr at 120°C

- Curvas de tensión-deformación unitaria para hierro fundido y vidrio.



- Observe que para el vidrio, la tensión es proporcional a la deformación hasta el punto de fractura.
- Su comportamiento es completamente elástico; no hay evidencia de deformación plástica ni en tensión ni en compresión.
- Además, la tensión a la que se produce la fractura es mucho mayor en compresión que en tensión; esta es una característica habitual de los materiales frágiles.

- Algunos materiales exhiben un comportamiento dependiente del tiempo.
- A temperatura ambiente, este *comportamiento viscoelástico* se encuentra comúnmente en polímeros cuya estructura consiste en moléculas de cadena larga con enlaces químicos primarios a lo largo de la cadena y enlaces secundarios entre cadenas. Los enlaces secundarios pueden romperse mediante activación térmica.
- A temperaturas más altas, los metales también pueden exhibir efectos dependientes del tiempo.
- Curvas de tensión-deformación unitaria para metacrilato de metilo comercial (PMMA, polil-metil-metacrilato).
- PMMA, es uno de los plásticos de ingeniería. La placa de acrílico se obtiene de la polimerización del metacrilato de metilo y se encuentra en la industria del plástico en gránulos (“pellas” en castellano; “pellets” en inglés) o en placas.
- Los gránulos son para el proceso de inyección o extrusión y las placas para termoformado o para mecanizado. A diferencia del vidrio posee bajo peso, mejor transparencia, menor fragilidad, [wikipedia].



- Para la mayoría de los materiales dúctiles, las curvas tensión-deformación unitaria para tensión y compresión son casi las mismas para deformaciones pequeñas en comparación con la unidad.
- En los siguientes desarrollos teóricos por defecto asumiremos que son idénticas, excepto que se explicita lo contrario.

## 1.2 Idealización de las curvas tensión-deformación

- En la mecánica de cuerpos deformables, necesitamos conocer la relación entre la tensión y la deformación.
- La relación tensión-deformación Ec. (1.1)(a), junto con las ecuaciones diferenciales de equilibrio Ec. (1.1)(b) y las relaciones deformación-desplazamiento Ec. (1.1)(c), deben satisfacerse en cada punto de un cuerpo deformable en equilibrio,

$$(a) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (b) \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad (c) \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.1)$$

- Estas relaciones para cada elemento diferencial comprenden los tres pasos en los que debe basarse la solución, que incluye los siguientes **pasos en el análisis de cuerpos deformables**:
  - (1) Estudio de fuerzas y requisitos de equilibrio.
  - (2) Estudio de deformación y condiciones de ajuste geométrico.
  - (3) Aplicación de las relaciones de fuerza-deformación.

- En un dado problema, se desean emplear modelos simples y coherentes con la realidad física, por ello se idealiza a las curvas de tensión-deformación tal que puedan describirse mediante ecuaciones sencillas.
- La idoneidad de tal idealización dependerá de la magnitud de las deformaciones consideradas, y esto a su vez dependerá del problema práctico que se esté estudiando.
- Para decidir qué idealizaciones de las curvas de tensión-deformación son necesarias, debemos recurrir a las aplicaciones de la mecánica en la que se utilizan estas idealizaciones.
- Ejemplos prácticos se observan en el diseño de estructuras que soportan o producen ciertas deformaciones deseadas (diseño de resortes, válvulas de seguridad, parachoque, panel de choque, pasador de corte, diafragma de escape), diseño de procesos de corte y conformado de metales, diseño de elementos para evitar diversos tipos de falla.

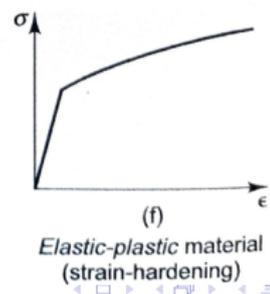
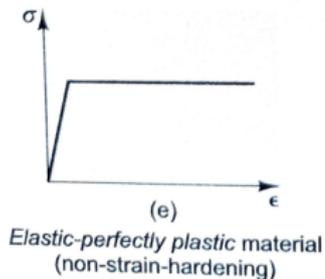
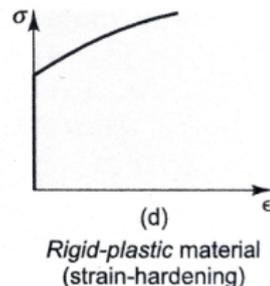
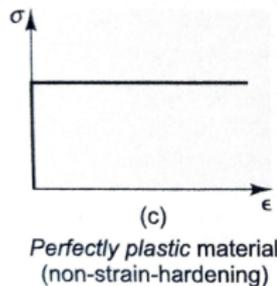
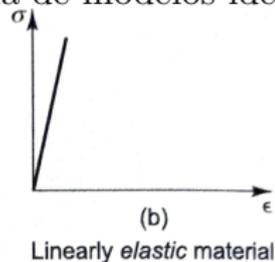
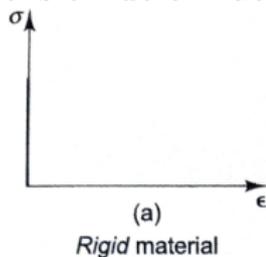
- El análisis de diversos problemas que surgen en la mecánica de los sólidos tales como **deformaciones excesivas (plasticidad), fractura, fatiga, desgaste, corrosión**, muestra que existe una necesidad de una variedad de relaciones de tensión-deformación.
- En la mayoría de los materiales es imposible describir la curva de tensión-deformación mediante una expresión matemática sencilla, por ende el comportamiento del material está representado por una *curva idealizada de tensión-deformación* que enfatiza aquellos aspectos del comportamiento que son más importantes en ese problema particular.

- La fractura es el modo de falla más peligroso.
- Las estructuras frágiles son aquellas que se fracturan con poca deformación plástica en comparación con la deformación elástica, por lo que podemos basar todos nuestros cálculos para estos materiales en una relación lineal entre tensión y deformación.
- Para estructuras dúctiles, todavía no existe una teoría cuantitativa que prediga la fractura de forma consensuada. Ver Wiki.
- Parte de la dificultad probablemente se deba a nuestra falta de conocimiento (i) de las distribuciones de tensión y deformación en la región plástica frente a una grieta, (ii) y de la deformación alrededor de los agujeros que crecen a partir de inclusiones y se fusionan para causar una fractura.
- En algunas estructuras grandes, el crecimiento de fracturas por orificios puede extenderse desde una muesca pronunciada, aunque el esfuerzo promedio esté por debajo del límite elástico. En tales casos también deben tenerse en cuenta las deformaciones elásticas.

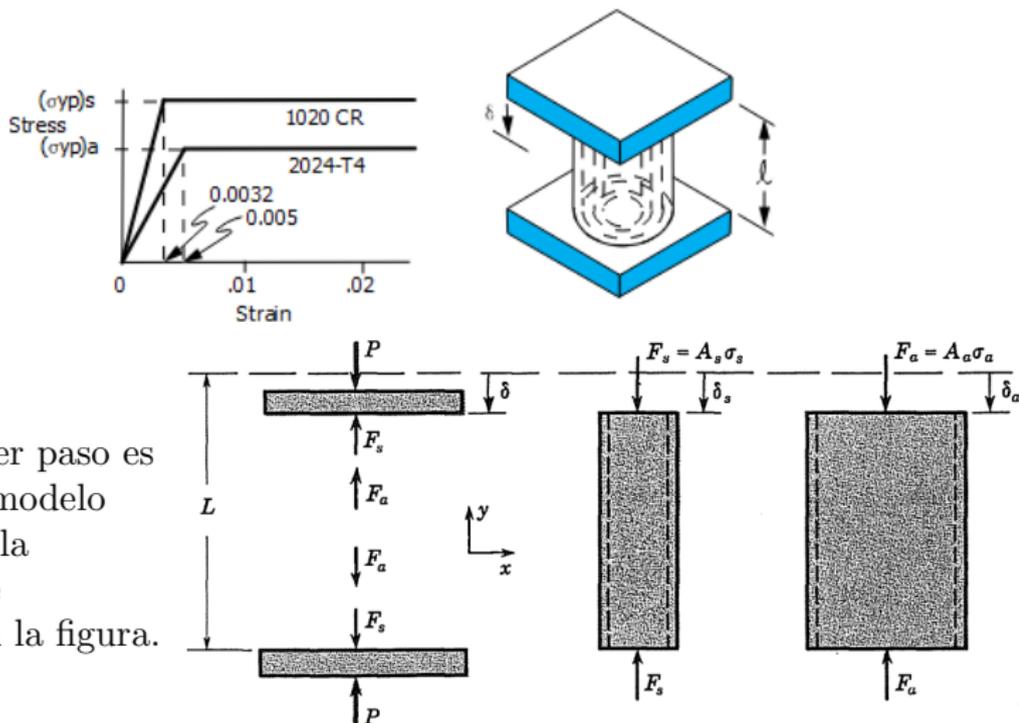
- Otra forma de fractura surge cuando se aplican tensiones, quizás incluso menores que el límite elástico, repetidamente, digamos miles o millones de veces.
- Estas repeticiones de esfuerzos eventualmente producen finas grietas que crecen muy lentamente al principio y luego se extienden rápidamente por toda la pieza, dando muy poca advertencia de la falla inminente. Este proceso se conoce como fatiga.
- **fracture vs buckling in brittle thin-shells**

- **Ejemplo 1.1:** Grafique el diagrama  $\varepsilon - \sigma$  para los siguientes modelos idealizados de comportamiento del material, estos modelos son los de uso más práctico debido a su simplicidad matemática.
  - i. *Material rígido*, la deformación no depende del esfuerzo aplicado. Estudio de grandes movimientos y fuerzas sobre piezas de máquina, para proporcionar una potencia adecuada y resistencia al desgaste.
  - ii. *Material linealmente elástico*, la deformación es proporcional al esfuerzo. Es útil en diseños a pequeñas deformaciones, en rigidez o para prevenir la fatiga o fractura en estructuras frágiles.
  - iii. *Material plástico-rígido*, se desprecian las deformaciones elásticas y dependientes del tiempo. Si se libera la tensión, la deformación permanece. El endurecimiento por la deformación puede despreciarse, material *perfectamente plástico*, o modelarse. Este tipo de idealizaciones se emplean para determinar cargas máximas de estructuras, en el estudio de problemas de mecanizado y conformado de metales, y en algunos estudios detallados de fracturas.
  - iv. *Material plástico-elástico*, están presentes tanto deformaciones elásticas como plásticas, el endurecimiento puede o no ser despreciado. Se emplean para diseñar bajo deformaciones moderadas y al realizar estudios detallados de fractura, desgaste y fricción.

- Curvas tensión-deformación unitaria de modelos idealizados.



- **Ejemplo 1.2:** Dos tubos coaxiales, el interior de acero 1020 CR y sección transversal de área  $A_s$ , y el exterior de aleación de aluminio 2024-T4 y área  $A_a$ , se comprimen entre placas duras. Determinar la curva de carga-deformación del conjunto, cuando se comprime en la región plástica por una fuerza axial  $P$ .



- Nuestro primer paso es construir un modelo idealizado de la situación, que mostramos en la figura.

● **Ejemplo 1.2 (cont.):**

-1- Compatibilidad geométrica

$$\varepsilon_s = \frac{\delta_s}{L} = \varepsilon_a = \frac{\delta_a}{L} = \varepsilon = \frac{\delta}{L}.$$

-2- Relaciones tensión deformación.

- Se deben considerar 3 rangos de  $\varepsilon$

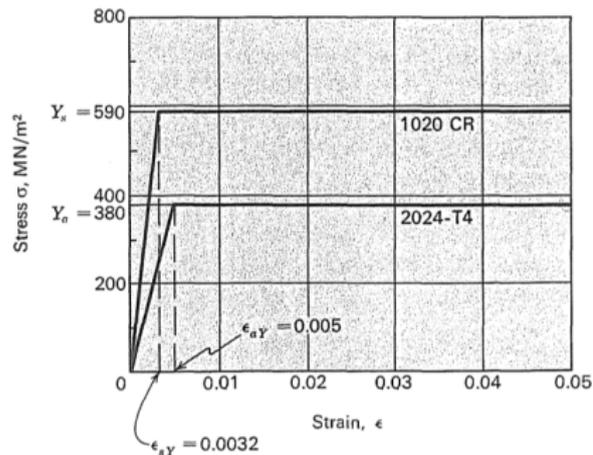
$$\begin{aligned} 0 &\leq \varepsilon \leq 0.0032, \\ 0.0032 &< \varepsilon \leq 0.0050, \\ \varepsilon &> 0.0050 \end{aligned}$$

- Siendo las tensiones definidas como

$$\sigma_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s = E_s \varepsilon, & 0.0000 \leq \varepsilon \leq 0.0032 \\ Y_s = 590 \text{ MPa}, & 0.0032 < \varepsilon \end{cases}$$

$$\sigma_a = \begin{cases} E_a \varepsilon_a = E_a \varepsilon, & 0.0000 \leq \varepsilon \leq 0.0050 \\ Y_a = 380 \text{ MPa}, & 0.0050 < \varepsilon \end{cases}$$

donde  $E_s = 184 \text{ GN/m}^2$ ,  $E_a = 76 \text{ GN/m}^2$ .



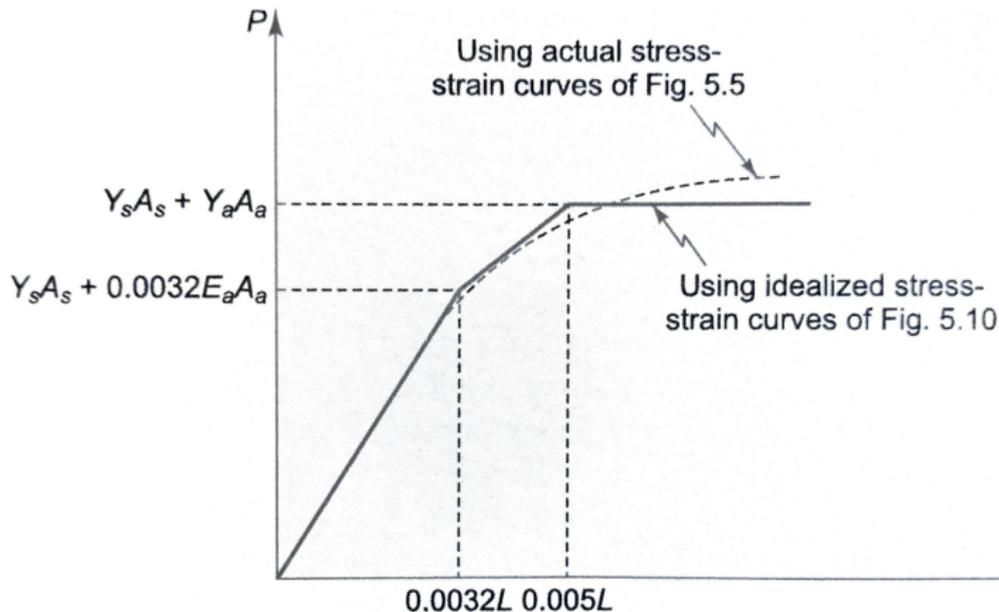
Curvas de tensión-deformación idealizadas para el Ejemplo 1.2.

- **Ejemplo 1.2 (cont.):** Determinar la curva de  $P - \delta$  del conjunto,  $r_s = 5$  mm,  $t_s = 0.5$  mm,  $r_a = 10$  mm,  $t_a = 1$  mm,  $L = 50$  mm.

### -3- Equilibrio

$$\sum F_y = \sigma_s A_s + \sigma_a A_a - P = 0.$$

- Curva de carga-deformación para el Ejemplo 1.2.



## 1.3 Relaciones constitutivas elástico lineales

- En las secciones anteriores se consideraron las relaciones de tensión-deformación para el caso especial de carga uniaxial. Solo estaba presente un componente del estrés, el componente axial normal, y solo se consideró el componente axial normal de la deformación.
- Ahora generalizaremos el comportamiento elástico en la prueba de tensión para llegar a las relaciones que conectan los seis componentes de la tensión con las seis componentes de la deformación elástica.
- Nos limitaremos a materiales que sean linealmente elásticos.
- Utilizaremos como definición de deformaciones expresada en la Ec. (1.1)(a), y por lo tanto, también nos restringimos a pequeñas deformaciones en comparación con la unidad.

- Dado un sistema de coordenadas cartesianas, los tensores de tensión y deformación se pueden representar por matrices  $3 \times 3$ , es decir

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

- El tensor de rigidez nos permite definir un mapeo lineal entre los nueve números  $\sigma_{ij}$  y los nueve números  $\varepsilon_{kl}$ , se representa en el caso más general por  $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$  números reales  $C_{ijkl}$ .
- Los tres tensores generalmente varían de un punto a otro dentro del medio, y también pueden variar con el tiempo.
- El tensor de deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$  especifica el desplazamiento de las partículas del medio en la vecindad del punto, mientras que el tensor de tensión  $\boldsymbol{\sigma}$  especifica las fuerzas que las parcelas vecinas del medio ejercen entre sí.
- Por lo tanto, son independientes de la composición y del estado físico del material. El tensor de rigidez  $\boldsymbol{C}$ , por otro lado, es una propiedad del material, y a menudo depende de variables de estado físico como temperatura, presión y microestructura.

- Como hemos visto en secciones precedentes el estado general de tensión en un punto se describe mediante tres componentes normales de tensión y tres componentes de tensión de corte.
- Del mismo modo, el estado más general de deformación puede describirse mediante tres componentes normales de deformación y tres componentes de deformación por cizallamiento o corte.
- Por lo tanto, las relaciones generales entre tensión y la deformación unitaria se pueden establecer en seis ecuaciones, cada una de las cuales proporciona la dependencia de un componente de la tensión de los diversos componentes de deformación

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon},$$

donde  $C_{ijkl}$  es el tensor de rigidez o de elasticidad, mientras sus elementos son los coeficientes que relacionan las deformaciones con las tensiones.

- Debido a las simetrías inherentes de  $\sigma$  y  $\varepsilon$  se tiene que  $\mathbf{C}$  debe tener las siguientes simetrías

$$C_{ijkl} = C_{jikl},$$

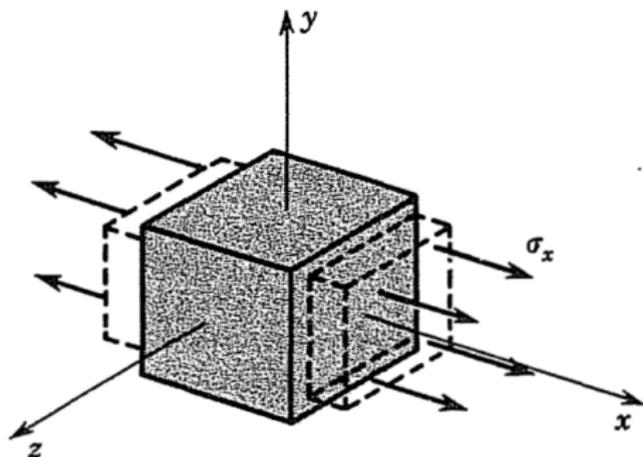
$$C_{ijkl} = C_{ijlk},$$

$$C_{ijkl} = C_{klij},$$

es decir solo 21 coeficientes elásticos de este último son independientes.

- Un material isotrópico se define como aquel cuyas propiedades son independientes de la orientación.
- Los materiales compuestos, cuya microestructura posee elementos estructurales orientados al azar, pueden considerarse estadísticamente isotrópicos.
- Para materiales isotrópicos (que tienen las mismas propiedades físicas en cualquier dirección),  $\mathbf{C}$  puede reducirse a solo dos números independientes, los parámetros de Lamè-Hooke.

- Primero, considere un elemento en el que solo hay un componente de la acción del estrés normal, ver figura.



- Si consideramos solo materiales en los cuales la deformación unitaria es directamente proporcional al esfuerzo. Esta relación se puede expresar en términos matemáticos como

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E},$$

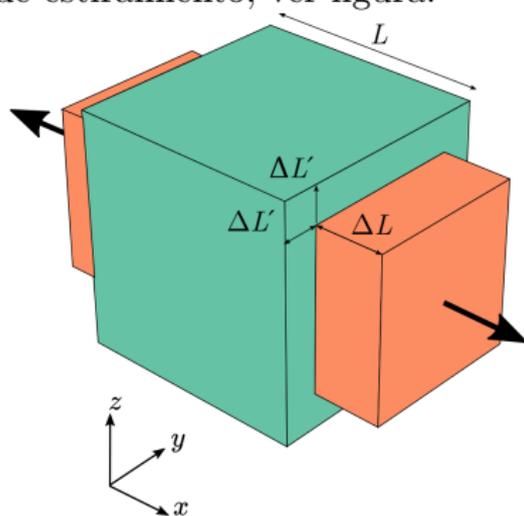
la cual es otra forma de la ley de Hooke para carga uniaxial.

- Además del componente normal de la deformación unitaria en la dirección  $x$ ,  $\varepsilon_x$ , nuestra experiencia nos lleva a esperar que habrá una contracción lateral cuando una barra se alargue.
- Mediciones precisas realizadas durante pruebas de tracción confirman esta suposición, y se encuentra que la deformación de compresión lateral es una fracción fija de la deformación normal.
- Además, pruebas de compresión uniaxial muestran una deformación extensional lateral que es la misma fracción fija de la contracción lateral cuando se estira. Esta fracción fija se conoce como la *relación de Poisson* o *parámetro de Poisson* y se le da el símbolo  $\nu$ .
- Para la condición de tensión uniaxial ilustrada en la figura anterior, las deformaciones laterales  $\varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$  deben ser iguales porque ni el material, que es isotrópico, ni el modo de tensión favorecen alguna dirección.
- Para un material elástico lineal, estas deformaciones se pueden expresar como

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}.$$

- El *coeficiente de Poisson* ( $\nu$ ) es una constante elástica que proporciona una medida del estrechamiento de la sección de un prisma de material elástico lineal e isotrópico cuando se estira longitudinalmente y se adelgaza en las direcciones perpendiculares a la de estiramiento, ver figura.

- Un cubo con lados de longitud  $L$  de un material isotrópico linealmente elástico sujeto a tensión a lo largo del eje  $x$ . El cubo verde no está deformado, el rojo se expande en la dirección  $x$  por  $\Delta L$  debido a la tensión, y se contrae en las direcciones  $y$  y  $z$  por  $\Delta L'$ .



- Para valores muy pequeños de  $\Delta L$  y  $\Delta L'$ , la aproximación de primer orden produce:

$$\nu \approx -\frac{\Delta L'}{\Delta L} = -\frac{\frac{\Delta L'}{L}}{\frac{\Delta L}{L}} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}.$$

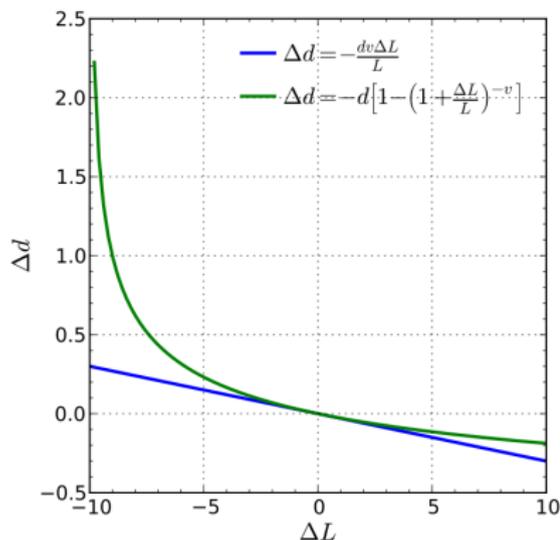
- Antes de continuar consideremos el cambio de ancho de una barra de diámetro  $d$  y longitud  $L$  (eje axial  $z$ ), la cual está sujeta a tensión, de modo que su longitud cambiará en  $\Delta L$ , entonces su diámetro  $d$  cambiará en:

$$\Delta d = -d\nu \frac{\Delta L}{L}, \quad \Rightarrow \frac{\Delta d}{d} = -\nu \frac{\Delta L}{L}, \quad \Rightarrow \varepsilon_r = -\nu \varepsilon_z.$$

- La fórmula anterior es correcta solo en el caso de pequeñas deformaciones. Si las deformaciones son grandes, se puede utilizar la siguiente expresión (más precisa):

$$\frac{\Delta d}{d} = -1 + \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right)^{-\nu}.$$

El valor es negativo porque disminuye con el aumento de la longitud.



- En la figura se muestra la comparación entre las dos fórmulas, una para deformaciones pequeñas, otra para deformaciones grandes.

**Ejercicio 1.2:** Muestre que partiendo de la expresión dada para el caso de grandes deformaciones en una barra de diámetro  $d$  y longitud  $L$  (eje axial  $z$ ), el parámetro de Poisson está dado por

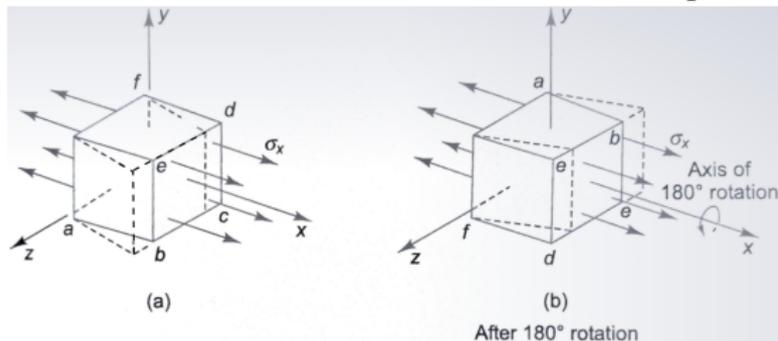
$$\begin{aligned}\nu &= -\frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right)} \\ &= -\frac{\ln(1 + \varepsilon_r)}{\ln(1 + \varepsilon_z)}\end{aligned}$$

Por lo tanto para pequeñas deformaciones se tiene

$$\nu = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_z}.$$

- En el **Ejercicio 1.2** se deben emplear propiedades de los logaritmos y luego desarrollar  $\ln(1 + \epsilon)$  en una serie de Taylor a primer orden,  $\epsilon \ll 1$ .

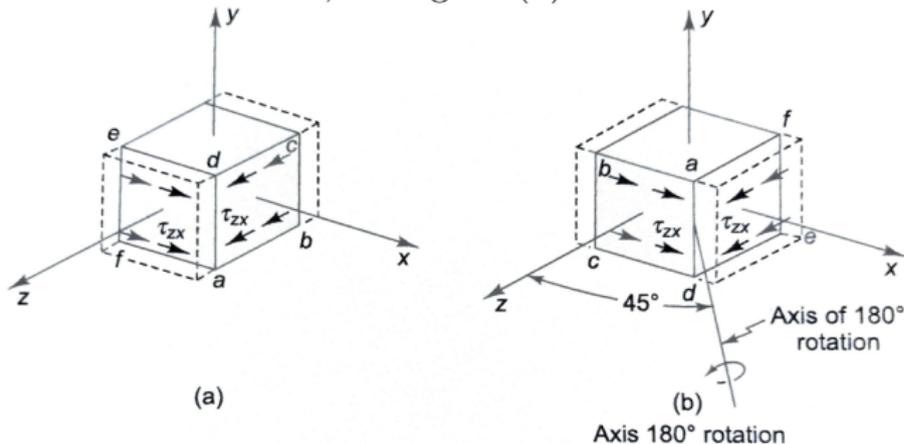
- Ahora, consideramos la posibilidad de deformaciones por corte resultantes del esfuerzo normal  $\sigma_x$ .
- De nuevo, la isotropía del material simplifica las relaciones. Suponga que estuviera presente una deformación por corte, como se muestra en la figura. Una rotación de  $180^\circ$  del elemento alrededor del eje  $x$ , (b), parecería dar una deformación de corte en el sentido opuesto.



- Si el material es isotrópico, su comportamiento de tensión-deformación debe ser independiente de una rotación de  $180^\circ$ . Esta contradicción se evita solo si la deformación de corte debido a un componente de deformación normal desaparece.
- Argumentos similares muestran que los otros dos componentes de la deformación de corte también deben desaparecer, y que, en consecuencia, un esfuerzo normal produce solo deformaciones normales.

- Se requiere un argumento adicional para descartar la posibilidad de una hipotética deformación normal  $\varepsilon_x$  debido a una tensión de corte  $\tau_{yz}$ .
- La isotropía del material simplifica las relaciones. Si se aplicara una rotación de  $180^\circ$  del elemento alrededor del eje  $x$ , se tendría que una tensión de corte  $\tau_{yz}$  pero en sentido opuesto generaría la misma hipotética deformación normal  $\varepsilon_x$ .
- En otras palabras, la linealidad del material requeriría cambios constantes de signo para que exista una hipotética proporcionalidad entre  $\varepsilon_x$  y  $\tau_{yz}$ .
- Nuevamente, la contradicción se evita solo si la deformación normal  $\varepsilon_x$  no está presente, en caso de que se aplique un esfuerzo cortante  $\tau_{yz}$ .

- Por último, supongamos una tensión cortante  $\tau_{zx}$  que produjera una deformación unitaria normal, ver figura (a).



- Si se hace girar el cubo 180° alrededor de un eje inclinado 45°, figura (b), la tensión cortante  $\tau_{zx}$  sería la misma así como el material, por su isotropía, pero la componente de la deformación unitaria sería distinta.
- Es decir, esta contradicción solo se evita si la deformación unitaria normal no existe cuando se aplica una tensión de corte.
- Argumentos análogos de simetría y linealidad muestran que no pueden existir componentes de deformación distintos de  $\gamma_{zx}$ , individualmente o en combinación, como resultado del componente de esfuerzo cortante  $\tau_{zx}$ .

- De manera más general, concluimos que cada componente de esfuerzo cortante produce solo su componente de deformación de corte correspondiente.
- Además, la linealidad requiere proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación, y la isotropía requiere que la constante de proporcionalidad,  $G$ , sea independiente de la orientación, es decir.

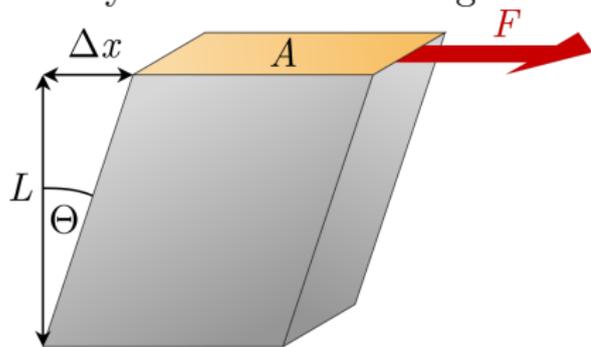
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},$$

donde  $G$  se denomina módulo de corte.

- Experimentalmente el módulo elástico transversal (o módulo cortante) puede medirse de varios modos, conceptualmente la forma más sencilla es considerar un cubo como el de la figura y someterlo a una fuerza cortante, para pequeñas deformaciones se puede calcular la razón entre la tensión y la deformación angular:

$$G = \frac{\tau_m}{\Theta} \approx \frac{F/A}{\Delta x/L} = \frac{F L}{\Delta x A}$$

donde  $\tau_m$  es la tensión cortante,  $\Theta$  es la deformación angular.



- El módulo de corte también puede medirse a partir de experimentos de torsión, por lo que dicha constante no sólo interviene en los procesos de cizalladura como se verá durante el curso.

## 1.4 Ley de Hooke generalizada

- Dado un material elástico isotrópico lineal, con todos los componentes de tensión presentes, se obtienen las siguientes relaciones tensión-deformación:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

- Estas ecuaciones constitutivas son la **ley de Hooke generalizada** o **ecuaciones de Lamè–Hooke**.

- Ley de Hooke en forma matricial (notación de Voigt)

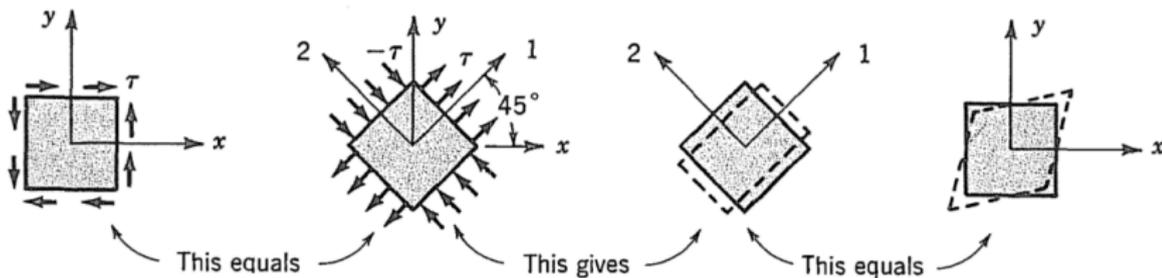
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}.$$

- Una consecuencia de la isotropía es el hecho de que los ejes principales de deformación en un punto de un cuerpo tensionado coinciden con los ejes principales de tensión en ese punto.
- Las relaciones angulares en los círculos de Mohr para la tensión y la deformación son, por lo tanto, idénticas, y al determinar la ubicación de los ejes principales correspondientes a un estado de tensión dado, se puede usar el círculo de Mohr para la tensión o la deformación.

- Ejemplo 1.3:** Para un material isotrópico elástico lineal el módulo de elasticidad transversal está relacionado con el módulo de Young y el coeficiente de Poisson mediante la relación:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{\tau_{ij}}{2\varepsilon_{ij}}, \quad i \neq j.$$

Obtenga esta relación mediante el análisis de un estado de tensión de corte puro  $\tau$ , ver figura.



**Ejemplo 1.3** (*cont.*)

- Como primer paso observamos la Ec. (1.1) y obtenemos la siguiente expresión para la deformación unitaria de corte

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau}{G}.$$

- Del análisis del estado de tensiones de la figura se tiene que el estado de tensiones de corte puro  $\tau$  es equivalente a un estado de tensiones principales  $\sigma_1 = \tau$  y  $\sigma_2 = -\tau$  respecto del eje de coordenadas 1,2.
- Las deformaciones unitarias principales expresadas en los ejes 1,2

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau(1 + \nu)}{E}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} = -\frac{\tau(1 + \nu)}{E}.$$

- Empleando las fórmulas de transformación de la deformación unitaria (círculo de Mohr) es posible expresar la deformación unitaria de corte con respecto a los ejes  $xy$  en función de las deformaciones principales unitarias como

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau.$$

**Ejercicio 1.3:** las ecuaciones constitutivas se expresan en forma matricial en términos del módulo de Young y del coeficiente de Poisson como

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & & & \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{(1+\nu)}{E} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{(1+\nu)}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix}$$

Muestre que las relaciones inversas se expresan como

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha & \alpha & & & \\ \alpha & 1+\alpha & \alpha & & & \\ \alpha & \alpha & 1+\alpha & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix}$$

donde  $\alpha := \frac{\nu}{1-2\nu}$ .

- En elasticidad lineal, los parámetros de Lamè son constantes elásticas que caracterizan por completo el comportamiento elástico lineal de un sólido isótropo en pequeñas deformaciones.
- Un material isotrópico lineal solo posee dos constantes elásticas independientes, *los parámetros de Lamè*:  $\lambda$  y  $\mu$ .
- Estos dos parámetros se designan como:
  - $\lambda$  primer parámetro de Lamè.
  - $\mu$  segundo parámetro de Lamè, o bien como módulo de elasticidad transversal, módulo de corte, módulo de rigidez transversal o módulo elástico tangencial. También denotado por la letra  $G$ .
- La ecuación constitutiva de un material elástico lineal homogéneo e isótropo, ley de Hooke, se expresa como

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}, \quad (1.3)$$

expresión que constituye las denominadas *ecuaciones de Lamè*, donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es la tensión,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  el tensor de deformación,  $\mathbf{I}$  la matriz identidad y  $\operatorname{tr}(\cdot)$  la función traza.

- El parámetro  $\lambda$  no tiene una interpretación física directa o simple, pero sirve para simplificar la matriz de rigidez en la ley de Hooke.
- $(\lambda, \mu)$  constituyen una parametrización del módulo de elasticidad para medios isótropos homogéneos, y están relacionados con los otros módulos de elasticidad.

- **Ejemplo 1.4:** determinar la relación entre los parámetros  $(E, \nu)$  y  $(\lambda, \mu)$ .
- De las expresiones dadas en el **Ejercicio 1.3** (pág. 43) se tiene que  $\sigma_{xx}$  se expresa como

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{E}{1 + \nu} \left( (1 + \alpha)\varepsilon_{xx} + \alpha\varepsilon_{yy} + \alpha\varepsilon_{zz} \right) \\
 &= \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{xx} + \frac{E}{1 + \nu} \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\
 &= \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{xx} + \frac{E}{1 + \nu} \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \\
 &= 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})
 \end{aligned}$$

- Por lo tanto

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

- Relaciones entre constantes elásticas de un material isótropo lineal.
- En *ingeniería estructural* se emplean los parámetros  $(E, \nu)$ , aunque a veces también se usa la elección equivalente  $(E, G)$ .
- En *termodinámica de sólidos deformables* se emplea el par  $(K, G)$ , donde  $K$  es el módulo de compresibilidad (isotérmica).

	$E$ : módulo de Young $\nu$ : coeficiente de Poisson	$K$ : módulo de compresibilidad $G$ : módulo de rigidez	$\lambda$ : 1.º coeficiente de Lamé $\mu$ : 2.º coeficiente de Lamé
$(E, \nu)$	---	$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$ $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$	$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$ $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$
$(K, G)$	$E = \frac{9KG}{3K + G}$ $\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$	---	$\lambda = K - \frac{2G}{3}$ $\mu = G$
$(\lambda, \mu)$	$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	$K = \lambda + \frac{2\mu}{3}$ $G = \mu$	---

- Para un material isótropo elástico perfectamente incompresible,  $\nu = 0.5$ .
- La mayor parte de los materiales prácticos en la ingeniería rondan entre 0.0 y 0.5, aunque existen algunos materiales compuestos llamados *materiales auxéticos* que tienen coeficiente de Poisson negativo.
- Termodinámicamente puede probarse que todo material tiene coeficientes de Poisson en el intervalo  $(-1, 0.5)$ , dado que la energía elástica de deformación (por unidad de volumen) para cualquier material isótropo alrededor del punto de equilibrio (estado natural) puede escribirse aproximadamente como:

$$\mathcal{E}_{\text{def}} = \mathcal{E}_{\text{def}0} + K \left( \sum_i \varepsilon_{ii} \right)^2 + G \sum_{i,j} \left( \varepsilon_{ik} - \frac{\delta_{ij} \varepsilon_V}{3} \right)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon_{ij}^3).$$

- La existencia de un mínimo relativo de la energía para ese estado de equilibrio requiere:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0.$$

- Esta última condición sólo se puede cumplir si el coeficiente de Poisson cumple  $-1 < \nu < 0.5$ .

## 1.5 Deformaciones térmicas

- En la región elástica, el efecto de la temperatura sobre la deformación aparece de dos maneras:
  - 1) al causar una modificación en los valores de las constantes elásticas,
  - 2) al producir directamente una deformación incluso en ausencia de tensión.
- El efecto sobre las constantes elásticas para muchos materiales es pequeño para un cambio de temperatura de pocos cientos de grados centígrados y no se considerará más.
- La deformación debida al cambio de temperatura en ausencia de tensión se denomina deformación térmica y se denota con el superíndice  $t$  en el símbolo de deformación de este modo:  $\varepsilon^t$ .
- Para un material isotrópico, los argumentos de simetría muestran que la deformación térmica debe ser una expansión o contracción pura sin componentes de deformación por cizallamiento referidos a ningún conjunto de ejes.

- Las deformaciones térmicas unitarias no son perfectamente lineales ante cambios de temperatura, si bien para cambios de temperatura de 20-100°C podemos describir de cerca la variación real mediante una aproximación lineal.
- Se obtienen entonces las siguientes deformaciones térmicas debido al cambio de temperatura de  $T_0$  a  $T$ .

$$\varepsilon_x^t = \varepsilon_y^t = \varepsilon_z^t = \alpha(T - T_0),$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de expansión lineal.

- La deformación total en un punto en un cuerpo elástico es la suma debido al estrés y a la temperatura, viene dada por

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^t, \quad \gamma_{xy}^t = \gamma_{yz}^t = \gamma_{zx}^t = 0.$$

donde  $\varepsilon^e$  denota la deformación elástica debido a la tensión y  $\varepsilon^t$  es la deformación térmica.

- Constantes elásticas para materiales isotrópicos a temperatura ambiente.

<i>Material</i>	<i>Composition</i>	<i>Modulus of elasticity</i> <i>E,</i> GN/m <sup>2</sup>	<i>Poisson's ratio,</i> <i>ν</i>	<i>Shear modulus</i> <i>G,</i> GN/m <sup>2</sup>	<i>Coeff. of linear expansion</i> <i>α,</i> 10 <sup>-6</sup> /°C	<i>Mass Density</i> 10 <sup>3</sup> kg/m <sup>3</sup>
Aluminum <sup>1</sup>	Pure and alloy	68–78.6	0.32–0.34	25.5–26.5	20.0–24.1	2.66–2.88
Brass <sup>1, 2</sup>	60–70% Cu, 40–30% Zn	100–110	0.33–0.36	36.5–41.4	19.8–20.9	8.36–8.50
Copper <sup>1, 2, 3</sup>		117–118	0.33–0.36	63.4–64.8	16.6–16.9	8.94–8.97
Iron, cast <sup>2, 3</sup>	2.7–3.6% C	89–145	0.21–0.30	35.8–56.5	10.4	6.95–7.34
Steel <sup>1, 2</sup>	Carbon and low alloy	193–220	0.26–0.29	75.8–82.0	9.9–12.8	7.72–7.86
Stainless steel <sup>3, 7</sup>	18% Cr, 8% Ni	193–207	0.30	73.1	14.9–16.9	7.64–7.92
Titanium <sup>1, 2</sup>	Pure and alloy	106–114	0.34	41.4	8.82	4.51
Glass <sup>4</sup>	Various	50–79	0.21–0.27	26.2–32.4	5.94–9.54	2.38–3.88
Methyl methacrylate <sup>5</sup>		2.4–3.5	0.35	1.03	90	1.16
Polyethylene <sup>5</sup>		0.14–0.38	0.45	0.117	180	0.91
Rubber <sup>6</sup>		0.00076–0.0041	0.50	0.0003–0.001	126–198	1.0–1.24

# Bibliografía



Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).

An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.



Russel C. Hibbeler (2011).

Mecánica de Materiales. 8va Ed. México, Pearson, 2011.

# Fin

