Mecánica de los Sólidos – Unidad 3B
Relaciones tensión–deformación–temperatura

Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
dmillan@fcai.uncu.edu.ar

San Rafael–Argentina, septiembre de 2021

Contenido

2.1 Ecuaciones completas de elasticidad

- *Teoría de la elasticidad* es el nombre dado al área del conocimiento que se ocupa de la distribución de la tensión y de la deformación unitaria en los cuerpos elásticos sujetos a cargas, desplazamientos y distribuciones de temperatura.
- El problema consiste en encontrar distribuciones de tensión y deformación unitaria que satisfagan las cargas y desplazamientos prescritos en el borde del cuerpo y que en cada punto del mismo satisfagan las ecuaciones de equilibrio, las relaciones tensión-deformación-temperatura, las condiciones geométricas asociadas con la definición de deformación y el concepto de desplazamientos continuos.
- Resumimos a continuación, los tres pasos en los que debe basarse la solución, es decir las ecuaciones explícitas que deben cumplirse en cada punto de un cuerpo no acelerado, isotrópico, lineal-elástico y sujeto a pequeñas deformaciones unitarias: equilibrio, compatibilidad geométrica y relaciones tensión–deformación–temperatura.

- **Equilibrio**
  En la superficie, los componentes de tensión deben estar en equilibrio con las cargas externas aplicadaus, y dentro del cuerpo deben satisfacer las siguientes ecuaciones de equilibrio

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0, \end{aligned}} \tag{2.1}$$

  donde X, Y y Z son fuerzas volumétricas que se distribuyen sobre el sólido con intensidades X, Y y Z por unidad de volumen.

- **Compatibilidad Geométrica**
  Los desplazamientos deben coincidir con las condiciones de contorno geométricas y deben ser funciones continuas de la posición con las que están asociados los componentes de deformación unitaria, de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned}} \tag{2.2}$$

  donde u, v y w son las componentes de desplazamiento en las direcciones x, y y z.

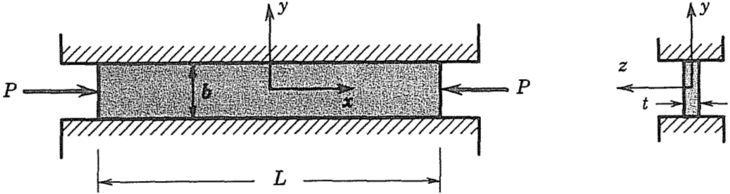
- **Relaciones Tensión-Deformación-Temperatura**
  Además de las relaciones entre los componentes de tensión y deformación, debemos incluir el efecto de la temperatura en los componentes de deformación.
  Ambos efectos están incluidos en las siguientes relaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha(T - T_0), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha(T - T_0), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha(T - T_0), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned}} \tag{2.3}$$

- Las ecuaciones anteriores proporcionan 15 ecuaciones para los seis componentes de tensión, los seis componentes de deformación unitaria y las tres componentes de desplazamiento.
- Estas 15 ecuaciones son la base de lo que comúnmente se llama *Teoría de la Elasticidad Lineal*.
- Las ecuaciones son lineales debido al comportamiento del material lineal asumido en la Ec. (2.3) y también debido a la restricción de pequeñas deformaciones unitarias en la Ec. (2.2).
- Adicionalmente, de la Ec. (2.2) se tiene que las deformaciones unitarias (y por lo tanto las tensiones) están asociadas con la configuración no deformada. Esto significa que la Ec. (2.1) representa una aplicación de los requisitos de equilibrio en la configuración no deformada.
- Las ecuaciones completas (2.1), (2.2) y (2.3) se aplican a deformaciones de sólidos isotrópicos linealmente elásticos que involucran pequeñas deformaciones y para las cuales es aceptable aplicar los requerimientos de equilibrio en la configuración no deformada.

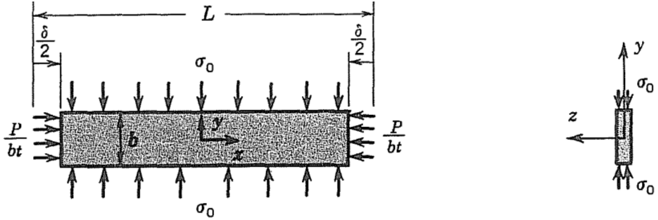
- Para obtener soluciones a estas ecuaciones generalmente es necesario realizar integraciones.
- Para fijar la solución para un cuerpo elástico en particular, es necesario prescribir condiciones de contorno en cada punto de la superficie del cuerpo.
- Más comúnmente, se especifica el vector de desplazamiento en el borde, o el vector tensión aplicado por una carga externa.
- Si en cada punto de la superficie de un cuerpo elástico, se prescribe el vector de desplazamiento o el vector de tensión superficial, entonces *existe una solución única* que satisface las Ecs. (2.1), (2.2) y (2.3) en todo el interior y la cual cumple las condiciones de borde prescritas en la superficie.

- **Ejemplo 2.1**: Una placa larga y delgada de ancho b, espesor t y longitud L se coloca entre dos paredes rígidas, separadas una distancia b, se aplica una fuerza axial P, como se muestra en la figura.



– Deseamos encontrar los desplazamientos u, v y w de la placa.

- **Ejemplo 2.1** (*cont.*): Idealizamos la situación, ver figura.



- Al construir el modelo se ha asumido:
  - *i.* La fuerza axial P resulta en un esfuerzo axial normal distribuido uniformemente sobre el área de la placa, incluidos los extremos.
  - *ii.* No hay tensión normal en la dirección delgada, $\sigma_z = 0$. Esto implica un caso de *tensión plana* en el plano xy.
  - *iii.* No hay deformación en la dirección y, es decir, $\varepsilon_y = 0$. Esto implica un caso de *deformación plana* en el plano xz.
  - *iv.* No hay fuerza de fricción en las paredes (o, como alternativa, es lo suficientemente pequeña como para ser despreciable).
  - *v.* La tensión normal de contacto entre la placa y la pared es uniforme a lo largo y ancho de la placa. Ahora satisfacemos los requisitos (2.1), (2.2), y (2.3) para el modelo idealizado de la figura.

- **Ejemplo 2.1** *(cont.)*

– **Equilibrio**.
El equilibrio con las cargas externas se satisface cuando las tensiones existentes en la placa son

$$\sigma_x = -\frac{P}{bt}, \qquad \sigma_y = \sigma_0, \qquad \sigma_z = 0, \qquad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Estos esfuerzos también satisfacen las ecuaciones de equilibrio (2.1) y, por lo tanto, suponemos que son los esfuerzos que actúan en toda la placa.

– **Compatibilidad Geométrica**.
Dado que las paredes son rígidas, la placa no puede expandirse en la dirección y, por lo tanto

$$\varepsilon_y = 0.$$

Además, en términos de δ, podemos escribir

$$\varepsilon_x = -\frac{\delta}{L}.$$

- **Ejemplo 2.1** *(cont.)*

– **Relaciones Tensión-Deformación unitaria**.
Considerando las expresiones obtenidas en el equilibrio y dado que la temperatura es constante, las Ecs. (2.3) se reducen a

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \qquad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y),$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

Si reemplazamos las expresiones obtenidas previamente para las tensiones y deformaciones unitarias

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = -\dfrac{\delta}{L}, \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = 0, \\ \varepsilon_z = -\dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_y = \nu\sigma_x = -\nu\dfrac{P}{bt}, \\ \dfrac{\delta}{L} = (1-\nu^2)\dfrac{P}{Ebt}, \\ \varepsilon_z = \nu(1+\nu)\dfrac{P}{Ebt} = \dfrac{\nu}{1-\nu}\dfrac{\delta}{L}. \end{cases}$$

Observamos que las paredes rígidas reducen la deflexión axial de la placa en un factor $(1-\nu^2)$.

- **Ejemplo 2.1** *(cont.)*

– **Relaciones Deformación-Desplazamiento.**
Si consideramos que el origen de las coordenadas está en el centro de la placa y suponemos que este punto no se mueve ni en la dirección x ni en la z, entonces sustituyendo las deformaciones unitarias en las Ecs. (2.2)

$$\varepsilon_x = -\frac{\delta}{L} = \frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\varepsilon_y = 0 = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\varepsilon_z = \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\delta}{L} = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

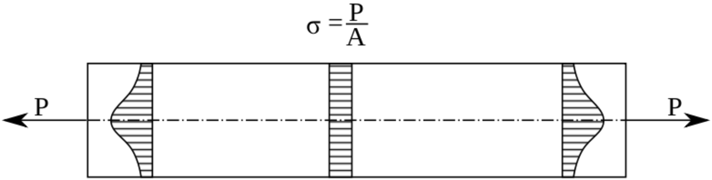
– Integrando estas relaciones e imponiendo condiciones de borde apropiadas, es posible determinar que los desplazamientos para esta placa son

$$u = -\frac{\delta}{L}x,$$
$$v = 0,$$
$$w = \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\delta}{L}z.$$

- **Ejemplo 2.1** (*cont.*): Algunos comentarios...
  - Como se ha mostrado es posible obtener una solución rigurosa y exacta del modelo idealizado, si bien no se ha obtenido una solución exacta al problema real de la figura, donde hay una fuerza concentrada en lugar de una tensión distribuida uniformemente que actúa en los extremos de la placa.
  - El problema originalmente planteado (fuerza puntual) es, en sí mismo, una aproximación más realista a la aplicación de una carga sobre una pequeña región de contacto. En base a experimentos de situaciones similares, se espera que la desviación de la placa real sea cercana a la estimada para el modelo idealizado.
  - Además, es probable que lejos de los extremos la distribución de tensiones para la placa real sea bastante similar a la del modelo, a pesar de que las distribución de tensiones es bastante diferente cerca de los extremos.
  - Este problema es una ilustración de una clase de situaciones en las que es muy difícil obtener una solución exacta al problema real, pero en el que es relativamente fácil obtener una solución exacta o casi exacta a una aproximación idealizada del problema real.
  - Esto se conoce como el *principio de Saint Venant*.

2.2 Principio de Saint Venant

- Principio que establece que los efectos de un sistema de fuerzas sobre un sólido deformable son independientes de la distribución particular de fuerzas, que conducen a esa resultante, a partir de una "cierta distancia" de los puntos de aplicación de dichas fuerzas.

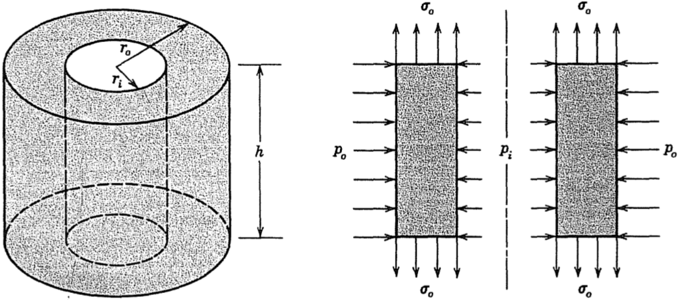


Esquema de las tensiones longitudinales en un prisma solicitado por fuerzas puntuales. Cerca de los extremos la distribución no es uniforme, pero hacia el centro de la sección los esfuerzos tienden a ser exactamente iguales a los que se habrían obtenido bajo cargas uniformemente distribuidas, y estáticamente equivalentes a las cargas puntuales.

- En el contexto de la teoría de la elasticidad puede enunciarse como: *"... la diferencia entre los efectos de dos sistemas de cargas estáticamente equivalentes se hace arbitrariamente pequeña a distancias suficientemente grandes de los puntos de aplicación de dichas cargas."*
- El principio establece que la equivalencia estática implica asintóticamente la equivalencia elástica.
- La formulación original fue publicada en francés por A. J. C. B. Saint-Venant en 1855.
- Esta formulación informal es bien conocida y usada por los ingenieros mecánicos, no obstante trabajos matemáticos más recientes lo han reformulado ligeramente con el objeto de poder construir una demostración matemáticamente precisa en el contexto de las ecuaciones en derivadas parciales de la Teoría de la Elasticidad.
- En otras palabras, la afirmación original no es suficientemente precisa tal como mostró von Mises en 1945, [ver Wiki].

2.3 Cilindro de pared gruesa

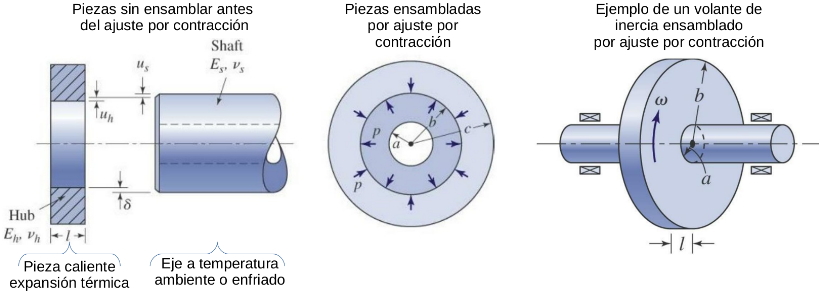
- En este problema se desea obtener la solución exacta, dentro de la teoría de la elasticidad para sólidos isotrópicos homogéneos, de un cilindro de pared gruesa.
- Considere un cilindro de altura h, radio interno r_i y radio externo r_o. El cual está sujeto a las cargas externas: presión interna uniforme p_i, presión externa uniforme p_o y una tensión de tracción axial uniforme σ_o.



- Determinaremos la distribución de la tensión dentro del cilindro cuando está sujeto a las cargas externas indicadas.

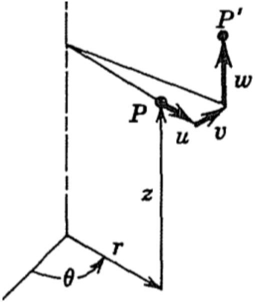
- Esta situación permite el estudio de varios problemas prácticos. Por ejemplo, el cilindro puede ser un recipiente a presión de paredes gruesas donde la carga importante es la presión interna o un casco sumergible donde la carga importante es la presión externa.

- Alternativamente, si la altura fuera pequeña en comparación con los radios, el cilindro podría ser una placa o un disco, y la carga importante podría ser la presión interna que surge del $shrink - fit$ (“ajuste por contracción”) cuando se fija a un eje.



El método de ajuste por contracción se utiliza para ajustar engranajes, poleas, mangas y otros componentes en ejes sólidos y huecos, pero la aplicación más popular es encajar rodamientos en ejes.

- Para aprovechar la simetría cilíndrica, utilizamos las coordenadas cilíndricas r, θ y z que se muestran en la figura.



- En la figura también se indican los componentes u, v y w en las direcciones r, θ y z del vector de desplazamiento en coordenadas cilíndricas.

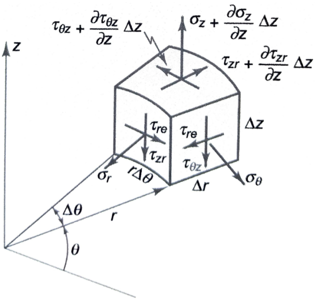
- Estado general de tensión 3D en coordenadas cilíndricas, el requisito de que $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ conduce a las siguientes tres ecuaciones

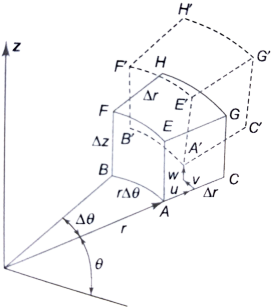
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0.
\end{aligned}
$$

- Estado general de deformación 3D en coordenadas cilíndricas

$$
\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}, \\
\gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\
\gamma_{zr} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}.
\end{aligned}
$$





- Las condiciones de contorno son para
  - la superficie interna, $r = r_i$:

$$\sigma_r = -p_i, \qquad \tau_{rz} = 0, \qquad \tau_{r\theta} = 0; \tag{a}$$

  - la superficie externa, $r = r_o$:

$$\sigma_r = -p_o, \qquad \tau_{rz} = 0, \qquad \tau_{r\theta} = 0; \tag{b}$$

  - y en las superficies superior e inferior, donde $z = h$ y $z = 0$:

$$\sigma_z = \sigma_o, \qquad \tau_{rz} = 0, \qquad \tau_{\theta z} = 0. \tag{c}$$

- El problema es determinar las tensiones que, junto con las deformaciones y los desplazamientos, satisfacen las 15 ecuaciones interiores y las tres condiciones de borde en cada punto de la superficie externa.

- El problema general se simplifica enormemente en el problema bajo análisis debido a la simetría radial de la carga.
- Basándonos en la simetría, buscaremos una solución en la que v, la componente θ del desplazamiento, desaparezca en todas partes y en la que todas las tensiones, deformaciones unitarias y desplazamientos sean independientes de θ.
- Si encontramos tal solución, sabemos por el principio de unicidad que de hecho es *la solución*.
- También formulamos la hipótesis tentativa, basada en la uniformidad de la carga axial, que $\sigma_z = \sigma_o$ en todo el interior y que todos los esfuerzos y deformaciones son independientes de z.
- Bajo las suposiciones realizadas, el problema colapsa a un tamaño manejable.
- Las tensiones cortantes $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ y las correspondientes deformaciones unitarias $\gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{rz}$ desaparecen en todas partes.

- Por lo tanto, las variables que quedan por determinar son dos desplazamientos u y w, las tensiones σ_r y σ_θ, y las tres deformaciones normales $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ y ε_z, con una única ecuación de *equilibrio*,

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \tag{d}$$

tres ecuaciones de *deformación-desplazamiento*,

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{dw}{dz}; \tag{e}$$

y tres ecuaciones de *tensión-deformación*,

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]; \end{aligned} \tag{f}$$

junto con las *condiciones de contorno*

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_i \quad \text{en} \quad r = r_i, \\ \sigma_r &= -p_o \quad \text{en} \quad r = r_o. \end{aligned} \tag{g}$$

- La solución para las tensiones transversales es:

$$\sigma_r = \frac{p_i\left(1-\left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right) - p_o\left(\left(\frac{r_o}{r_i}\right)^2 - \left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right)}{\left(\frac{r_o}{r_i}\right)^2 - 1}, \tag{2.4}$$

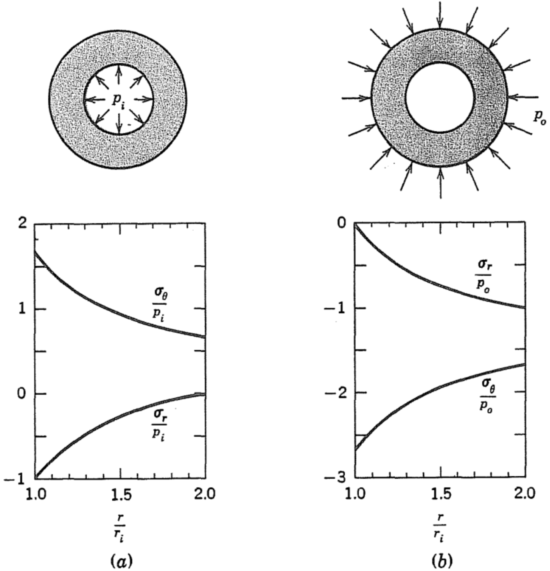
y

$$\sigma_\theta = \frac{p_i\left(1+\left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right) - p_o\left(\left(\frac{r_o}{r_i}\right)^2 + \left(\frac{r_o}{r}\right)^2\right)}{\left(\frac{r_o}{r_i}\right)^2 - 1}. \tag{2.5}$$

- La deformación axial se obtiene sustituyendo estas tensiones junto con $\sigma_z = \sigma_o$ en la tercera ecuación de (f),

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_o}{E} - \frac{2\nu}{E}\frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}. \tag{2.6}$$

Observamos que ε_z es independiente de la posición dentro del cilindro. Por tanto, el desplazamiento axial w varía linealmente con z.



Distribución de la tensión radial $\sigma_r(r)$ y la tensión tangencial $\sigma_\theta(r)$ en un cilindro con $r_o = 2r_i$ debido (a) presión interna p_i y (b) presión externa p_o.

- La solución encontrada (exacta) nos permite verificar el principio cualitativo de St. Venant.
- Sean dos conjuntos de fuerzas aplicados a un cuerpo elástico en su frontera. Deje que estas cargas sean idénticas en toda la superficie, excepto en cierta región pequeña R donde difieren. Las distribuciones de tensión interna resultantes serán, en general, diferentes en todo el interior.
- El principio de St. Venant afirma que las diferencias significativas en la tensión interna se localizarán en la vecindad inmediata de R si las dos cargas sobre la región R son estáticamente equivalentes.
- No se puede hacer una afirmación general sobre cuán grande será la diferencia en el entorno. Esto depende del tamaño, la forma y la ubicación de la pequeña región R, así como de la naturaleza de las diferentes cargas sobre R.
- Sea ϵ una medida representativa de la región R, entonces es una regla general que, para fines de ingeniería, las diferencias en la tensión interna se convierten en una fracción insignificante de las diferencias en la tensión superficial a distancias de la superficie $\gtrsim 2\epsilon - 3\epsilon$.

- **Ejemplo 2.2:** Cilindro de pared gruesa. Sea $r_i \ll r_o$, $p_i = p$ y $p_o = 0$. La dimensión representativa ϵ de la región R puede ser tomada como r_i, siendo la región donde se aplican las cargas, R, la superficie interna del cilindro de radio r_i. Se pide:
  - (a) Determinar la expresión aproximada para las tensiones transversales internas σ_r y σ_θ.
  - (b) Determine la distancia, como fracción de ϵ, a la cual las diferencias en las tensiones internas decaen a menos del 10 % de la existente en los puntos interiores.

- El ejemplo del cilindro de pared gruesa además nos permite ilustrar el concepto de *concentración de estrés*.
- Cuando se tensiona un cuerpo elástico con una irregularidad geométrica local, como un agujero para el aceite, un chavetero/chaveta, o una muesca, generalmente hay una variación localizada en el estado de tensión en la vecindad inmediata de la irregularidad.
- Los niveles máximos de estrés en la irregularidad pueden ser varias veces mayores que los niveles nominales de estrés en la mayor parte del cuerpo. En estas circunstancias, se dice que **la irregularidad causa una concentración de estrés**.

- **Ejemplo 2.3:** Cilindro de pared gruesa. Sea $r_i \ll r_o$, $p_i = 0$ y $p_o = p$. El pequeño agujero de radio r_i puede considerarse como una irregularidad geométrica en un cilindro sólido.

- Muestre que fuera del agujero pequeño, el estado de tensión es casi una compresión biaxial, con $\sigma_r = \sigma_\theta = -p$, mientras que en la superficie del agujero el estado de estrés es tensión simple, con $\sigma_r = 0$ y σ_θ casi igual a $2p$. El nivel de tensión pico es, por lo tanto, casi el doble que en la mayor parte del cilindro.
- El cambio en el estado de tensión se concentra en la vecindad cercana del agujero: aproximadamente el 90 % del cambio tiene lugar en un radio de $r = 3r_i$.

2.4 Solución general del problema elástico

- Según lo estudiado en los apartados precedentes, es posible plantear las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que rigen la solución del problema elástico.
- La resolución del problema elástico, de una forma general, precisa resolver un sistema de quince ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con quince incógnitas.
- Es decir, es posible plantear las ecuaciones a partir de cuya integración sería posible obtener las tensiones, deformaciones y movimientos de un determinado sólido deformable sometido a una serie de cargas.
- Si las ecuaciones anteriores se plantean de forma tal que las incógnitas sean los desplazamientos, se llega a un sistema de tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales conocidas con el nombre de *ecuaciones de Navier*.
- Alternativamente, si las incógnitas fueran las tensiones, el número de ecuaciones diferenciales es de seis. Dicho sistema de ecuaciones es conocido con el nombre de *ecuaciones de compatibilidad de Beltrami*.
- Ambas expresiones se desarrollan a continuación.

- Las leyes de Hooke generalizadas, como hemos visto anteriormente, expresan las deformaciones en función de las tensiones.
- Con las ecuaciones de Lamé se ha resuelto el problema inverso, es decir, expresar las tensiones en función de las deformaciones.
- Con estas relaciones, es evidente que las ecuaciones de equilibrio interno que relacionan las componentes de la matriz de tensiones pueden ser expresadas en términos de deformaciones, así como las ecuaciones de compatibilidad entre las componentes de la matriz de deformación se podrán expresar también en términos de tensiones.
- Como a su vez las deformaciones se definen a partir de las componentes u, v, w del vector desplazamiento $\mathbf{u}$, es obvio que tanto las ecuaciones de equilibrio interno y en el contorno como las condiciones de compatibilidad podrán ser formuladas en función de los desplazamientos.
- Veamos la forma que adoptan las ecuaciones de equilibrio interno expresadas en términos de desplazamientos.

- **Formulación del problema elástico en desplazamientos.**

- Expresemos primeramente las tensiones en función de u, v, w, partiendo de las ecuaciones de Lamé, para la primer componente de la tensión:

$$\sigma_x = \lambda\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu\varepsilon_x = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda\nabla\cdot\mathbf{u} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\\
\sigma_y &= \lambda\nabla\cdot\mathbf{u} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},\\
\sigma_z &= \lambda\nabla\cdot\mathbf{u} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},\\
\gamma_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),\\
\gamma_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
\gamma_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

- Sustituyendo las expresiones anteriores en la primer ecuación de equilibrio interno, se obtiene

$$
\begin{aligned}
0 &= X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\
&= X + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial z} \\
&= X + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).
\end{aligned}
$$

- Las otras dos ecuaciones se obtendrían por permutación circular.
- Las ecuaciones de equilibrio, expresadas en términos de desplazamientos,

$$
\begin{aligned}
X + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta u = 0, \\
Y + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta v = 0, \\
Z + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta w = 0,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

estas ecuaciones se denominan *ecuaciones de Navier*.

- Si multiplicamos las ecuaciones de Navier respectivamente por los vectores unitarios $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ y sumamos miembro a miembro, obtenemos:

$$\boldsymbol{F} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{2.8}$$

donde $\boldsymbol{F} = X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{j} + Z\,\mathbf{k}$ y $\Delta\mathbf{u} = \Delta u\,\mathbf{i} + \Delta v\,\mathbf{j} + \Delta w\,\mathbf{k}$.

- Esta ecuación es llamada *ecuación fundamental de la Elasticidad*. Su formulación vectorial es intrínseca, es decir, independiente de cualquier sistema particular de coordenadas. Es de hacer notar que en ella sólo intervienen las fuerzas de masa y los desplazamientos.
- Dado que para obtener las ecuaciones de Navier hemos hecho intervenir las ecuaciones de equilibrio y por partir de las funciones u, v, w está asegurado el cumplimiento de las ecuaciones de compatibilidad.
- La solución del problema elástico planteado en desplazamientos se reduce a encontrar soluciones de las ecuaciones (2.7) que verifiquen las condiciones de contorno.
- Dicho de otra manera, la ecuación fundamental de la Elasticidad (2.8) es la única que debe satisfacer el vector desplazamiento en todos los puntos del sólido elástico.

- **Formulación del problema elástico en tensiones**.

- Suponiendo que las fuerzas volumétricas X, Y y Z son constantes es posible mostrar

$$
\begin{aligned}
(1+\mu)\Delta\sigma_x + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} &= 0, \quad & (1+\mu)\Delta\tau_{xy} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x\,\partial y} &= 0,\\
(1+\mu)\Delta\sigma_y + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y^2} &= 0, \quad & (1+\mu)\Delta\tau_{xz} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x\,\partial z} &= 0,\\
(1+\mu)\Delta\sigma_z + \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} &= 0, \quad & (1+\mu)\Delta\tau_{yz} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y\,\partial z} &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

donde $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, que se llaman *ecuaciones de Beltrami*.

- De ellas se desprende que si las tensiones son funciones lineales de las coordenadas, las condiciones de compatibilidad quedan automáticamente satisfechas, ya que no figuran en ella más que derivadas de segundo orden.

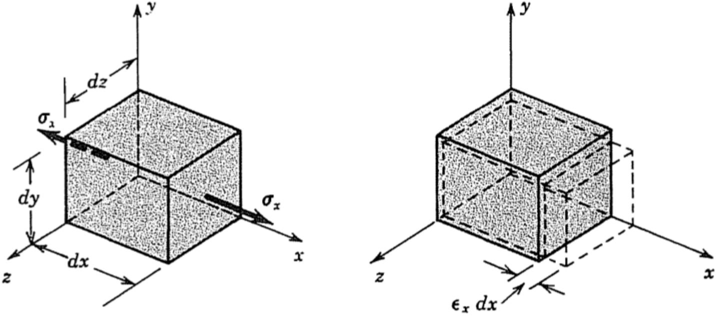
2.5 Energía de deformación en cuerpos elásticos

- Nos interesa analizar la energía de deformación de un cuerpo arbitrariamente elástico lineal sometido a pequeñas deformaciones.
- La energía elástica U almacenada en un resorte lineal se da en tres formas: en términos de la desviación δ, en términos de la fuerza F, o en términos de la desviación δ y la fuerza F.
- Como será evidente, en el desarrollo posterior, la última forma

$$\boxed{U = \frac{1}{2} F \, \delta},$$

  es más conveniente para nuestros propósitos.
- Debido a la linealidad, la fuerza y la desviación crecen de forma directamente proporcional durante el proceso de carga y, por lo tanto, el trabajo total realizado es solo la mitad del producto de la fuerza final y la desviación final.

- Apliquemos el concepto anterior a un elemento infinitesimal dentro de un cuerpo linealmente elástico.
- La figura muestra un eje de componente de tensión uniaxial que actúa sobre un elemento rectangular (izquierda), así como la deformación correspondiente (derecha), incluido el alargamiento debido al componente de deformación ε_x.



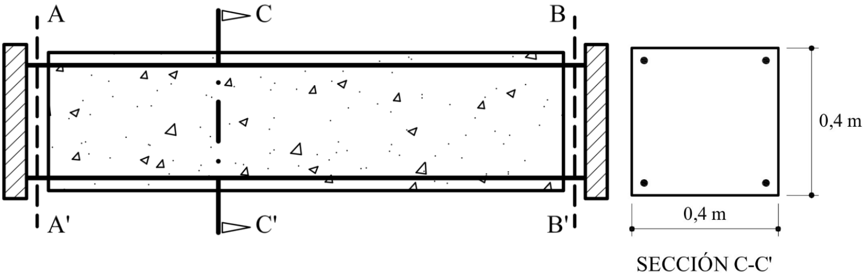
- La energía elástica almacenada en dicho elemento se denomina comúnmente *energía de deformación*.
- En este caso, la fuerza $\sigma_x dydz$ que actúa sobre la cara x-positiva realiza trabajo cuando el elemento se alarga $\varepsilon_x dx$.
- La energía de deformación dU almacenada en el elemento, cuando los valores finales de tensión y deformación son σ_x y ε_x, es

$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_x dydz)(\varepsilon_x dx) = \frac{1}{2}\sigma_x \, \varepsilon_x \, dV,$$

  donde $dV = dx\, dy\, dz$ es el volumen del elemento infinitesimal.
- Dado un cuerpo elástico de volumen total V, la energía de deformación total U se obtiene por integración

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma_x \, \varepsilon_x \, dV.$$

- **Ejemplo 2.4:** Una pieza de hormigón pretensado de longitud $L = 5m$, y sección cuadrada de $0.4 \times 0.4m^2$ se construye de la siguiente forma:
  1. Se tensan cuatro cables de sección ω cada uno a una tensión $\sigma_a = 800MPa$.
  2. Una vez tensados los cables, se hormigona.
  3. Una vez endurecido el hormigón se cortan los cables por AA' y BB' (ver figura).

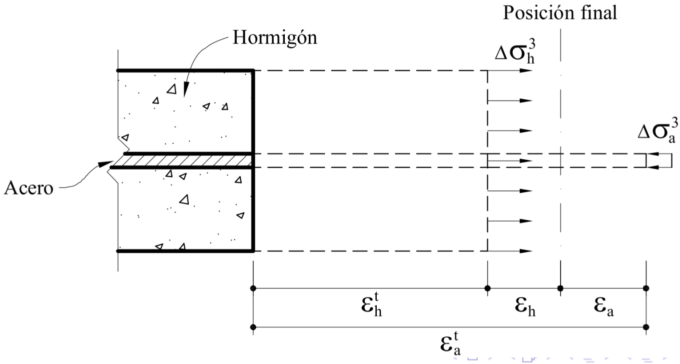


- **Ejemplo 2.4** *(cont.)*

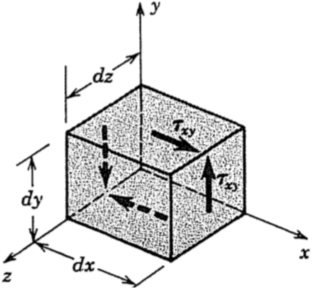
- Se pide determinar:
  a) Sección ω de cada uno de los cables de forma que la tensión final en el hormigón sea de $5MPa$.
  b) Tensión final en cada uno de los cables.
  c) Energía elástica del conjunto.
- Una vez se ha fabricada la pieza, se aplica una fuerza F de compresión de $260kN$. Hallar:
  d) Tensión final en el hormigón y en los cables.
  e) Energía elástica total.
- Finalmente, se descarga la fuerza F de compresión y el conjunto se somete a un incremento de temperatura de valor $\Delta T = 30^{o}C$.
  f) Determinar los incrementos de tensión que se producen como consecuencia de dicha variación térmica.
- Considerar:
  $E_a = 210\,GPa$, $E_h = 30\,GPa$,
  $\alpha_a = 1.2 \times 10^{-5}\,{}^{o}C^{-1}$, $\alpha_h = 10^{-5}\,{}^{o}C^{-1}$.

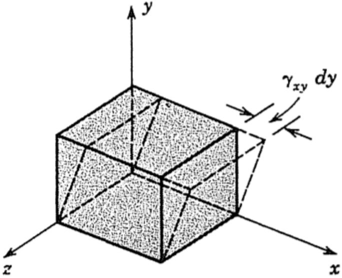
- **Ejemplo 2.4** (*cont.*):

- Valores de control:
  a) Sección ω de cada uno de los cables: $2.6\,cm^2$.
  b) Tensión final en cada uno de los cables: $765\,MPa$.
  c) Energía elástica $W = 7576.8\,J$.
  d) Tensión final en el hormigón y en los cables:
  $\sigma_h = 6.56\,MPa$ compresión, $\sigma_a = 754.02\,MPa$ tracción.
  e) Energía elástica $W = 7610.45\,J$.
  f) $\Delta\sigma_h = 0.079\,MPa$ tracción, $\Delta\sigma_a = 12.12\,MPa$ compresión.



- **Energía de deformación total de un estado 3D de tensión**
- Considere a continuación el componente de esfuerzo cortante τ_{xy} que actúa sobre el elemento infinitesimal en la figura (izquierda).





- La deformación correspondiente debida al componente de esfuerzo cortante γ_{xy} se indica en la figura (derecha).
- En este caso, la fuerza $\tau_{xy} dx\, dz$ actúa sobre la cara positiva y realiza trabajo a medida que esa cara se desplaza la distancia $\gamma_{xy} dy$.
- Debido a la linealidad del material, γ_{xy} y τ_{xy} crecen de forma directamente proporcional a medida que el elemento se deforma.

- La energía de deformación almacenada en el elemento, cuando los valores finales de deformación y tensión son γ_{xy} y τ_{xy}, es

$$dU = \frac{1}{2}(\tau_{xy} dx dz)(\gamma_{xy} dy) = \frac{1}{2}\tau_{xy}\,\gamma_{xy}\,dV.$$

- Se pueden escribir resultados análogos para cualquier otro par de tensiones y deformaciones (por ejemplo, σ_y y ε_y o τ_{yz} y γ_{yz}) cuando el componente de tensión involucrado es la única tensión que actúa sobre el elemento.
- La energía de deformación total almacenada en el elemento infinitesimal para un estado general 3D de tensión es

$$dU = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right) dV.$$

- En notación tensorial

$$dU = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}\, dV.$$

- La energía de tensión almacenada en todo el cuerpo es

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}\, dV = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}\, dV. \tag{2.10}$$

  Esta es la energía de deformación en un material lineal, la cual se conoce como **fórmula de Clapeyron**.
- En ingeniería es muy común describir la Ec. (2.10) en notación vectorial y no tensorial, empleando la descripción de Voigt para $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\sigma}$

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, dV = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}\, dV. \tag{2.11}$$

  donde observamos que la densidad de energía de deformación $\mathcal{W}$ como forma cuadrática de las componentes de la deformación.

2.6 Límite del modelo elástico: criterios de plastificación

- Se conocen como teorías de fallas elásticas o criterios de fallo elástico a los requisitos usados para determinar los esfuerzos estáticos permisibles en estructuras o componentes de máquinas.
- Más precisamente, una máquina que trabaja en ciclos reversibles debe ser diseñada de tal manera que sus tensiones no salgan del dominio elástico.
- Los criterios de fallo elástico establecen diferentes aproximaciones para diferentes materiales que permiten realizar el diseño de manera correcta.
- La ocurrencia de fallo elástico no implica en muchos casos la rotura de la pieza, ese otro caso requiere el estudio mediante la mecánica de la fractura.
- Se consideran materiales dúctiles (*e.g.* metales) a aquellos que pueden deformarse considerablemente antes de llegar a la rotura.
- Para este tipo de materiales existen dos teorías,
    1. Criterio de Tresca o teoría de la tensión tangencial máxima.
    2. Criterio de von Mises o teoría de la máxima energía de distorsión.

1) Criterio de Tresca.

- Esta teoría fue propuesta por Henri Tresca, bajo este criterio una pieza resistente o elemento estructural falla cuando en alguno de sus puntos sucede que:

$$\tau_{\text{máx}} \geq \frac{\sigma_Y}{2} \tag{2.12}$$

siendo σ_Y, la tensión de límite elástico del material de la pieza; $\tau_{\text{máx}} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, la tensión cortante máxima del punto considerado; σ_1, σ_3, la mayor y la menor tensión principal en el punto considerado.

- Se basa en limitar el diámetro de la mayor circunferencia de Mohr al valor σ_{T}

$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_{\mathrm{T}}^2\right]\left[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_{\mathrm{T}}^2\right]\left[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_{\mathrm{T}}^2\right] \leq 0.$$

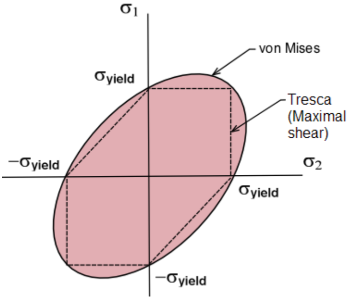
- Los estados tensionales posibles expresados como puntos $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ se encuentran comprendidos en el interior de un prisma hexagonal cuyo eje viene definido por la dirección $(1, 1, 1)$ y cuyo lado es $\sqrt{2/3}\,\sigma_{\mathrm{T}}$.
- La plastificación se produce cuando se alcanza la superficie del prisma.

2) **Criterio de von Mises.**

- Este criterio puede considerarse un refinamiento del criterio de Tresca.
- En este caso los estados posibles se encuentran en el interior de un cilindro con la misma orientación y el mismo radio que el prisma de Tresca.
- Su expresión es

$$\sigma_{\mathrm{vM}} = \sqrt{3\ J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}\ \left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} \leq \sigma_Y\,. \tag{2.13}$$

- Criterio de fluencia de von Mises en condiciones de carga 2D (planas): si la tensión en la tercera dimensión es cero ($\sigma_3 = 0$), no se prevé que se produzca ninguna fluencia para las coordenadas de tensión σ_1, σ_2 dentro del área rosa.
- Debido a que el criterio de rendimiento de Tresca está dentro del área rosa, el criterio de von Mises es más laxo (ver figura).



- Criterios de falla de von Mises para distintos estados de tensión.

State of Stress	Boundary Conditions	von Mises Equations
General	No restrictions	$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)]}$
Principal stresses	$\sigma_{12}=\sigma_{31}=\sigma_{23}=0$	$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}$
General plane stress	$\sigma_3=0$ $\sigma_{31}=\sigma_{23}=0$	$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{11}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}^2+3\sigma_{12}^2}$
Principal plane stress	$\sigma_3=0$ $\sigma_{12}=\sigma_{31}=\sigma_{23}=0$	$\sigma_v = \sqrt{\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}$
Pure shear	$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0$ $\sigma_{31}=\sigma_{23}=0$	$\sigma_v = \sqrt{3}\cdot\lvert\sigma_{12}\rvert$
Uniaxial	$\sigma_2=\sigma_3=0$ $\sigma_{12}=\sigma_{31}=\sigma_{23}=0$	$\sigma_v = \sigma_1$

- **Tensor desviador**

– En álgebra lineal, el desviador o parte desviadora de un tensor de segundo orden es un tensor de traza nula.

– En mecánica de sólidos deformables la parte desviadora de un tensor de deformación puede relacionarse con cambios de forma de un sólido que no alteran el volumen (cambios de forma isocóricos).

– El tensor de tensión σ_{ij} se puede expresar como la suma de otros dos tensores de tensión:

1. el *tensor hidrostático* o tensor volumétrico o tensor esférico, $\pi\delta_{ij}$, que tiende a cambiar el volumen del cuerpo; y
2. el *tensor desviador*, s_{ij}, que tiende a distorsionar el cuerpo sin cambiar su volumen.

– Entonces, sea el tensor de Cauchy dado como

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \pi\delta_{ij},$$

donde π es la tensión media dada por

$$\pi = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \tfrac{1}{3} I_1.$$

– El tensor desviador de tensiones se obtiene restando el tensor hidrostático al tensor de tensión de Cauchy:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij}, \qquad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \tfrac{1}{3}(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \pi & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \pi & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \pi \end{bmatrix}.$$

- **Invariantes del tensor desviador de tensiones**

– Como es un tensor de segundo orden, el tensor desviador de tensiones, $\boldsymbol{s}$, también tiene un conjunto de invariantes, que se pueden obtener utilizando el mismo procedimiento utilizado para calcular las invariantes del tensor de tensión $\boldsymbol{\sigma}$.

– Se puede demostrar que las direcciones principales del tensor desviador son las mismas que las direcciones principales del tensor de tensión.

– Por tanto, la ecuación característica es

$$|s_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = -\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3 = 0,$$

donde J_1, J_2, y J_3 son el primer, segundo y tercer invariante del tensor desviador. Sus valores son "invariantes" del sistema de coordenadas elegido.

– Los invariantes del tensor desviador se pueden expresar como una función de los componentes del s_{ij}, de sus valores principales, s_1, s_2 y s_3, o alternativamente, como una función de σ_{ij} o de sus valores principales σ_1, σ_2 y σ_3, o de sus invariantes I_1, I_2 e I_3.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= s_{kk} = 0, \\
J_2 &= \tfrac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = \tfrac{1}{2} \mathrm{tr}(\boldsymbol{s}^2) \\
&= \tfrac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\
&= \tfrac{1}{6}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2\right] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \\
&= \boxed{\tfrac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} \\
&= \tfrac{1}{3} I_1^2 - I_2 = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2) - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})^2\right], \\
J_3 &= \det(s_{ij}) \\
&= \tfrac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{s}^3) \\
&= \tfrac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) \\
&= s_1 s_2 s_3 \\
&= \tfrac{2}{27} I_1^3 - \tfrac{1}{3} I_1 I_2 + I_3 = \tfrac{1}{3}\left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^3) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) + \tfrac{2}{9}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})^3\right].
\end{aligned}
$$

- Dado que $J_1 = s_{kk} = 0$, se dice que el tensor desviador de esfuerzos está en un estado de corte puro.
- Como hemos visto una cantidad llamada esfuerzo equivalente o esfuerzo de von Mises se usa comúnmente en mecánica de sólidos. La tensión equivalente se define como

$$\sigma_{\mathrm{vM}} = \sqrt{3\ J_2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\ \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]},$$

por esto a veces la teoría de fallo de von Mises se llama teoría de fallo J_2.

- Hencky (1924) ofreció una interpretación física del criterio de von Mises sugiriendo que la plastificación comienza cuando la energía elástica de distorsión alcanza un valor crítico.
- Por esta razón, el criterio de von Mises también se conoce como el *criterio de máxima energía de deformación por distorsión*.
- Esto proviene de la relación entre J_2 y la densidad de energía de deformación elástica de distorsión $\mathcal{W}_D$ dada como

$$\mathcal{W}_D = \frac{J_2}{2G}, \qquad \text{siendo } G \text{ el módulo elástico de corte } \; G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

- Como hemos visto, la energía de deformación de un sólido deformable, iguala el trabajo exterior de las fuerzas que provocan dicha deformación.
  - Dicho trabajo U puede descomponerse, entre el trabajo invertido en cambiar la forma del cuerpo o energía de distorsión U_D y el trabajo invertido en comprimir o dilatar el cuerpo manteniendo constantes las relaciones geométricas o energía elástica volumétrica, U_V,

$$U = U_V + U_D.$$

  - Los dos términos vienen dados por:

$$\begin{aligned} U_V &= \int_V \frac{3}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 \frac{1-2\nu}{E} dV \\ &= \int_V \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2}{2K} dV, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} U_D &= U - U_V \\ &= \int_V \frac{1}{6G}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)\right] dV \\ &+ \int_V \frac{1}{2G}\left[\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right] dV. \end{aligned}$$

- Frecuentemente, la energía de distorsión dada por la última expresión, se expresa en términos de una combinación especial de las otras componentes de tensión llamada tensión de von Mises:

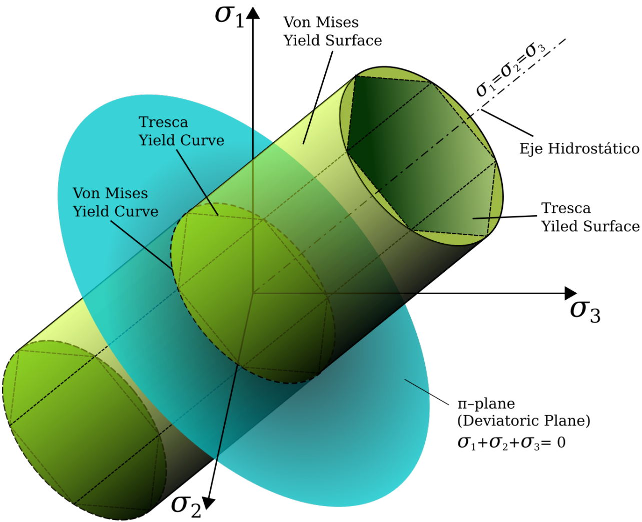
$$U_D = \int_V \mathcal{W}_D dV = \int_V \frac{J_2}{2G}\, dV = \int_V \frac{\sigma_{\mathrm{vM}}^2}{6G}\, dV.$$

- Igualando los integrandos se obtiene que la tensión de von Mises viene dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{vM}}^2 &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\\ &= \tfrac{1}{2}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\right] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2).\end{aligned}$$

2.7 Superficie de fluencia

- La *superficie de fluencia* [wiki] de un material es una construcción abstracta que permite visualizar el conjunto de tensiones posibles o admisibles dentro de un sólido deformable elastoplástico.
- La superficie de fluencia es una superficie bidimensional en el espacio de tensiones principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.
- Cuando un sólido deformable se somete a tensiones progresivamente mayores, la energía potencial elástica se incrementa y a partir de cierto punto se producen transformaciones termodinámicas irreversibles al superar dicha energía cierto valor.
- El conjunto de puntos por debajo de los cuales no se producen transformaciones termodinámicas irreversibles es el conjunto de tensiones admisibles, es una región conexa del espacio de tensiones (no presenta huecos).
- La frontera de la región de tensiones admisibles es precisamente superficie de fluencia.



Las superficies de fluencia de von Mises en coordenadas de tensión principales circunscriben un cilindro con radio $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y$ alrededor del eje hidrostático. También se muestra la superficie de rendimiento hexagonal de Tresca.

- Propiedades de la superficie de fluencia
  - *Convexidad*. Bajo argumentos termodinámicos puede probarse que, La superficie de fluencia es convexa.
  - *Compacidad*. La superficie de fluencia se considera cerrada y por tanto encierra un volumen finito. Y por tanto el conjunto de tensiones alcanzables es siempre un conjunto compacto.
  - *Continuidad*. La superfiecie de fluencia se considera que es Lipshitz-continua.
  - *Unicidad del problema elastoplástico*. Cuando la superficie no es diferenciable el problema elastoplástico puede ser tratado mediante métodos variacionales. Bajo condiciones suficientemente regulares puede probarse que la solución del problema elastoplástico, aun cuando la superficie no sea diferenciable, es única.

Bibliografía

- Stephen H. Crandall; Norman C. Dahl; Thomas J. Lardner (1999).
  An Introduction to the Mechanics of Solids: 2nd Ed. with SI Units. New York, McGraw-Hill, 1999.

- Russel C. Hibbeler (2011).
  Mecánica de Materiales. 8va Ed. México, Pearson, 2011.

Fin