

# Mecánica de los Sólidos – Unidad 4B

## Estados planos de tensión y deformación

Profesor Titular Daniel Millán  
JTP Eduardo Rodríguez

CONICET y Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo  
[dmillan@fcai.uncu.edu.ar](mailto:dmillan@fcai.uncu.edu.ar)

San Rafael–Argentina, septiembre de 2021



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



- 4. Función de Airy
  - 4.1 Introducción
  - 4.2 Función de tensiones de Airy
  - 4.3 Soluciones en coordenadas cartesianas usando polinomios

## 4.1 Introducción [Sadd, 2014]

- La **elasticidad** se ocupa de la determinación de la distribución de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en un sólido elástico bajo la influencia de fuerzas externas.
- La teoría lineal de pequeñas deformaciones establece un modelo matemático que permite soluciones a problemas que tienen aplicaciones en muchos campos de la ingeniería y la ciencia.
  - La **ingeniería civil** emplea el análisis de esfuerzos y deflexiones de estructuras, como varillas, vigas, placas y láminas. Las aplicaciones adicionales se encuentran en la geomecánica que involucra las tensiones en materiales como el suelo, la roca, el hormigón y el asfalto.
  - La **ingeniería mecánica** utiliza la elasticidad en numerosos problemas de análisis y diseño de elementos de máquinas. Dichas aplicaciones incluyen análisis de esfuerzos generales, esfuerzos de contacto, análisis de esfuerzos térmicos, mecánica de fracturas y fatiga.
  - La **ingeniería de materiales** utiliza la elasticidad para determinar los campos de tensión en sólidos cristalinos, alrededor de dislocaciones y en materiales con microestructura.
  - Las aplicaciones en **ingeniería aeronáutica y aeroespacial** incluyen análisis de esfuerzos, fracturas y fatiga en aeroestructuras.

- El concepto de relación fuerza-deformación elástica fue propuesto por primera vez por Robert Hooke en 1678. Sin embargo, la formulación principal de la teoría matemática de la elasticidad no se desarrolló hasta el siglo XIX.
- En 1821, Navier presentó sus investigaciones sobre las ecuaciones generales de equilibrio. Rápidamente lo siguió Cauchy, quien estudió las ecuaciones básicas de elasticidad y desarrolló la notación de la tensión en un punto.
- Una larga lista de científicos y matemáticos prominentes continuó el desarrollo de la teoría, incluidos los Bernoullis, Lord Kelvin, Poisson, Lamé, Green, Saint-Venant, Betti, Airy, Kirchhoff, Rayleigh, Love, Timoshenko, Kolossoff, Muskhelishvili y otros.
- Durante las dos décadas posteriores a la Segunda Guerra Mundial, la investigación de la elasticidad produjo un gran número de soluciones analíticas a problemas específicos de interés de la ingeniería.
- Las décadas de 1970 y 1980 incluyeron trabajo considerable en métodos numéricos que utilizan la teoría de elementos finitos y elementos de frontera. También durante este período, las aplicaciones de elasticidad se dirigieron a materiales anisotrópicos para aplicaciones a compuestos.
- Más recientemente, la elasticidad se ha utilizado en el modelado de materiales con microestructuras internas o heterogeneidad y en materiales graduados no homogéneos.

- El planteamiento del problema elástico para un estado de elasticidad plana en ausencia de fuerzas de volumen conduce a unas ecuaciones algo más sencillas de lo habitual para las que existe una gama amplia de técnicas de resolución del problema elástico plano, tales como
  - El método de la función de tensiones de Airy (a continuación).
  - El análisis armónico o de Fourier, generalmente usan la separación de variables junto con series de Fourier o integrales de Fourier.
  - Técnicas de variable compleja, permiten resolver problemas que son irresolubles con otros esquemas. El método se basa en la reducción del problema del valor límite de elasticidad a una formulación en el dominio complejo [Sadd, 2014], Cap. 10.

## 4.2 Función de tensiones de Airy

- Consideremos entonces el problema elástico para un estado de elasticidad plana en ausencia de fuerzas de volumen.
- En primer lugar las ecuaciones de equilibrio se reducen a solo dos ecuaciones independientes:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (4.1)$$

- Mientras que las condiciones de compatibilidad de Saint-Venant se reducen a una única ecuación independiente:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4.2)$$

- En las condiciones anteriores puede probarse que la solución del sistema formado por (4.1) y (4.2) sobre un cierto dominio plano, simplemente conexo, puede expresarse en función de una función biarmónica sobre dicho dominio, siendo las tensiones expresables en función de esta única **función biarmónica**:

$$\nabla^4 \phi = 0, \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}. \quad (4.3)$$

Además se cumple que:

$$\nabla^2 \phi = \sigma_x + \sigma_y.$$

- Frecuentemente, se especifica la función analítica de la función  $\phi$  y, posteriormente, se determinan los coeficientes, tal que satisfagan las condiciones en el borde y de biarmonicidad (4.3).
- Una vez determinadas las componentes del tensor de tensiones, se deducen el tensor de deformaciones mediante las leyes de Hooke generalizadas, y a partir de éstas se pueden determinarlas componentes del vector de desplazamiento de cualquier punto, integrando las ecuaciones diferenciales correspondientes.

● **Ejemplo 4.1:** *PDE biarmónica bidimensional.*

- Obtenga una ecuación en derivadas parciales (PDE) escalar para problemas de elasticidad 2D siendo que no hay fuerzas volumétricas, tal que la única incógnita sea la función de estrés.
- Observe que el resultado final se puede expresar como:

$$\phi_{,xxxx} + 2\phi_{,xxyy} + \phi_{,yyyy} = 0$$

- Muestre que esta expresión también se puede escribir usando el operador  $\nabla$  como:

$$\nabla^4 \phi = \left( \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}_{\nabla^2} \right)^2 \phi.$$

- *Pista:* considere el sistema formado por (4.1) y (4.2) sobre un cierto dominio plano sin fuerzas corporales en términos de la función de tensión de Airy.

## 4.3 Soluciones en coordenadas cartesianas usando polinomios

- Cuando se tienen en cuenta las condiciones de contorno, la formulación en coordenadas cartesianas es más útil para problemas con dominios rectangulares [ver Capítulo 8 de \[Sadd, 2014\]](#).
- El método se basa en el concepto de solución inversa donde asumimos una forma de la solución a la ecuación biarmónica

$$\nabla^4 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0,$$

y luego intente determinar qué problema puede resolverse con esta solución.

- La forma de solución asumida para la función de esfuerzo de Airy se toma como un polinomio general de las coordenadas en el plano, y esta forma se puede expresar convenientemente en la serie de potencias

$$\phi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n,$$

donde  $a_{mn}$  son coeficientes constantes a determinar.

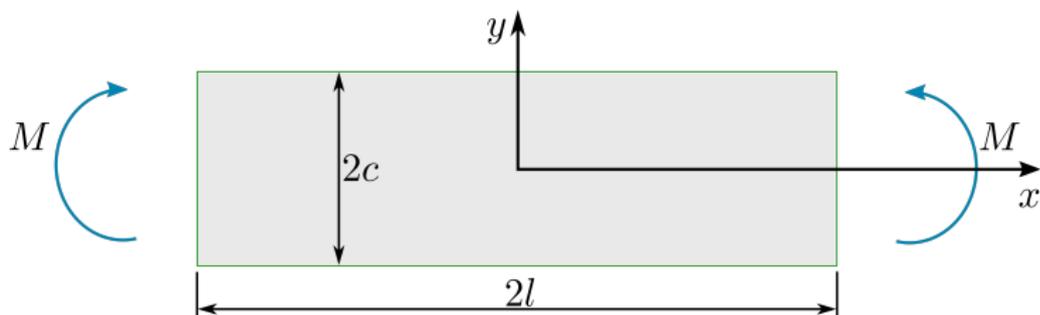
- Tenga en cuenta que en la forma de la función Airy los tres términos de orden más bajo con  $m + n \leq 1$  no contribuyen a las tensiones y, por lo tanto, se eliminan.
- Se observa que los términos de segundo orden producen un campo de tensiones constante, los términos de tercer orden dan una distribución lineal de tensiones, y así sucesivamente para polinomios de orden superior.
- Los términos con  $m + n \leq 3$  satisfacen automáticamente la ecuación biarmónica para cualquier elección de constantes  $a_{mn}$ .
- Sin embargo, para términos de orden superior con  $m + n > 3$ , las constantes  $a_{mn}$  deben cumplir ciertas relaciones para que el polinomio satisfaga la ecuación biarmónica.
- **Ejemplo 4.2:** considere los términos polinomiales de cuarto orden tal que  $\phi(x, y) = a_{40}x^4 + a_{22}x^2y^2 + a_{04}y^4$ , observe que dichos términos no satisfacen la ecuación biarmónica a menos que

$$3a_{40} + a_{22} + 3a_{04} = 0.$$

Esta condición especifica una constante en términos de las otras dos, dejando dos constantes a ser determinadas por las condiciones de contorno.

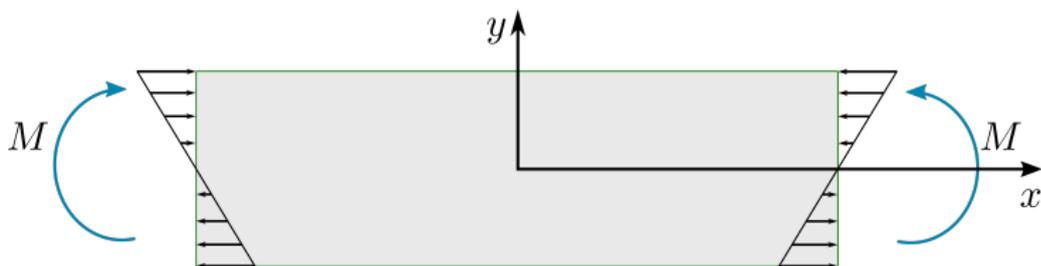
- Debido a que este método produce campos de tensiones polinomiales, no se espera que el esquema satisfaga condiciones de contorno generales.
- Sin embargo, como hemos visto en la Unidad 3-B **esta limitación se puede eludir modificando las condiciones de contorno del problema original utilizando el principio de Saint-Venant.**
- Esto se logra reemplazando una condición de borde no polinomial “complicada” por una condición polinomial estáticamente equivalente. La solución al problema modificado será entonces precisa en puntos lo suficientemente alejados del borde donde se realizaron los ajustes.
- Normalmente, este método tiene aplicaciones para problemas de forma rectangular en los que una dimensión es mucho mayor que la otra.
- A continuación se consideran dos ejemplos, cada uno de estos problemas se realizan en condiciones de tensión plana. Las soluciones en un estado de deformación plana se pueden determinar fácilmente utilizando el simple cambio en las constantes elásticas vistos en la Unidad 4-A. Además, para el caso con fuerzas corporales nulas y condiciones de contorno de tracción, los campos de tensión serán idénticos en cualquiera de las teorías.

- **Ejemplo 4.3:** *Flexión pura de una viga Sadd. 3rd Ed, pp. 163.*  
Mostraremos que la función de tensión  $\phi = A y^3$  corresponde a un estado de flexión pura de una viga de altura  $2c$  y longitud  $2l$  sujeta a un momento de flexión  $M$  como se muestra en la figura.



- La elección de la función de tensión se basa en el hecho de que una función de tercer orden dará lugar a un campo de tensión lineal. En particular una carga lineal en el borde, sobre los extremos  $x = \pm l$ , se reducirá a un momento puro.

- **Ejemplo 4.3** (*cont.*): *Flexión pura de una viga.*



- Observamos que en lugar de considerar la carga puntual exacta en los extremos, es conveniente relajar las condiciones de contorno en los extremos de la viga y solo modelar el efecto estáticamente equivalente. Esto se lleva a cabo con el fin de hacer manejable el problema bajo análisis.
- Esta simplificación conduce a una solución que no es necesariamente válida cerca de los extremos de la viga.

● **Ejemplo 4.3** (*cont.*): *Flexión pura de una viga.*

- 1) Verifique la condición de contorno en  $y = \pm c$ , es decir, no se posee tensión aplicada en las superficies superior e inferior de la viga.
- 2) Establezca una relación entre  $M$  y la distribución de tensiones en los extremos de la viga en forma integral para definir completamente el campo de tensiones en términos de los parámetros del problema,

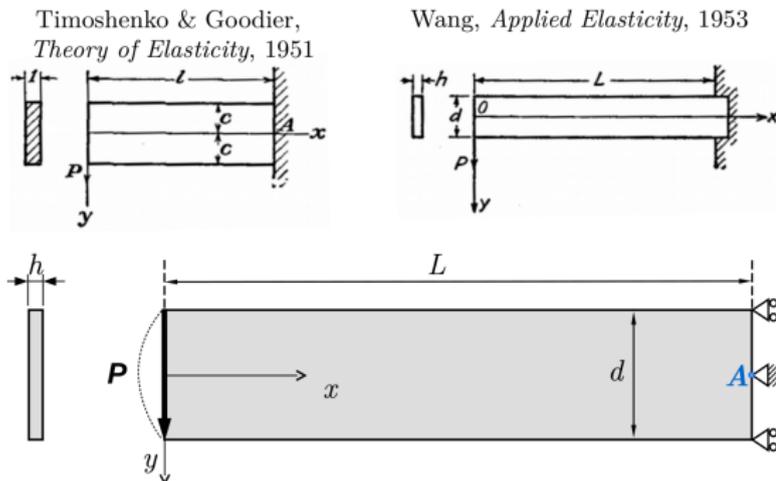
$$\sigma_x = -\frac{3M}{2c^3}y, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

- 3) Integre las relaciones deformación-desplazamiento para obtener el campo de desplazamiento. Muestre que el campo de desplazamiento es

$$\begin{aligned}u(x, y) &= -\frac{3M}{2Ec^3}xy, \\v(x, y) &= \frac{3M}{4Ec^3}(x^2 + \nu y^2 - l^2).\end{aligned}$$

● **Ejemplo 4.4:** *Viga en voladizo cargada en su extremo*

Solución del problema elástico lineal de una viga en voladizo de sección transversal rectangular estrecha bajo una carga  $P$  en su extremo (figura).



- El espesor  $h$  es pequeño en comparación con la altura  $d$ , por lo tanto este es un ejemplo de tensión plana.
- Al analizar las condiciones de contorno observamos que los bordes superior e inferior están libres de carga y las fuerzas de corte, que tienen una resultante  $P$ , se distribuyen de forma parabólica en  $x = 0$ .

● **Ejemplo 4.4 (cont.):** *Viga en voladizo cargada en su extremo.*

- Si  $P$  es grande en comparación con  $\rho g$ , la fuerza gravitacional puede despreciarse.
- Teniendo en cuenta que  $I = d^3h/12$  es el momento de inercia de la sección transversal, las expresiones finales para los componentes de la tensión son

$$\sigma_x = -\frac{Pxy}{I}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I} \left( \frac{d^2}{4} - y^2 \right). \quad (4.4)$$

### Timoshenko & Goodier:

Cabe señalar que esta solución representa una solución exacta solo si las fuerzas cortantes en los extremos se distribuyen de acuerdo con la misma ley parabólica que la tensión cortante  $\tau_{xy}$  y la intensidad de las fuerzas normales en el extremos es proporcional a  $y$ .

Si las fuerzas en los extremos se distribuyen de cualquier otra manera, la distribución de esfuerzos (4.4) no es una solución correcta para los extremos del voladizo, pero, en virtud del principio de Saint-Venant, puede considerarse satisfactoria, para secciones transversales a una distancia considerable de los extremos.

- **Ejemplo 4.5:** *Viga en voladizo cargada en su extremo.*

Verifique que las soluciones obtenidas por Timoshenko y Goodier son equivalentes a las de Wang, ver Figuras en problema anterior.

Timoshenko & Goodier:

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6GI} + \left( \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2GI} \right) y,$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}.$$

Wang:

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} + \frac{Py^3}{3EI} \left( 1 + \frac{\nu}{2} \right) + \frac{P}{2EI} \left( L^2 - (1 + \nu) \frac{d^2}{2} \right) y,$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{PL^2x}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI}.$$

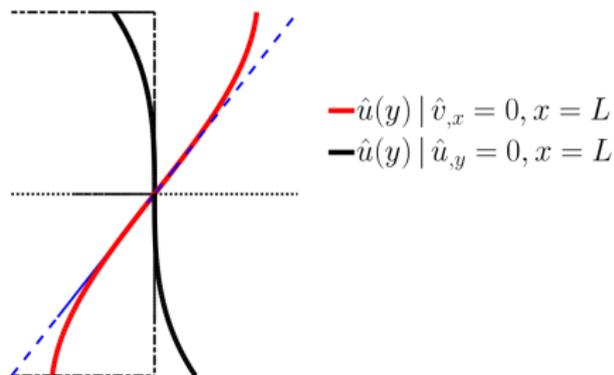
● **Ejemplo 4.6:** *Viga en voladizo cargada en su extremo.*

Grafique en Octave las configuraciones deformadas de la viga, analice la solución en la sección que se encuentra fijada, determine el punto que experimenta el desplazamiento máximo. Tome  $L = 1$ ,  $d = 0.1$  y  $\nu = 0.4$ .

- *Pista 1:* trabaje con las variables adimensionales

$$\hat{u} = \frac{EI}{PL^3}u, \quad \hat{v} = \frac{EI}{PL^3}v.$$

- *Pista 2:* Fig. 27, pág. 39, Timoshenko & Goodier, 1951.



### Timoshenko & Goodier:

Observe que la sección fija no es libre de distorsionarse libremente y la distribución de fuerzas en este extremo es diferente de la dada por las ecuaciones (4.4). La solución (4.4) es, sin embargo, satisfactoria para voladizos comparativamente largos a distancias considerables de los extremos.

# Bibliografía



Sadd, Martin H. (2014).

Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. Boston, Academic Press, 2014.



Timoshenko, Stephen; J N. Goodier (1951).

Theory of Elasticity. New York, McGraw-Hill, 1951.

# Fin

