Mecánica de los Sólidos 2021
Profesor Titular Daniel Millán
JTP Eduardo Rodríguez

Trabajo Práctico 0: Vectores y espacios vectoriales

Ejercicio 1.

Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^n$, pruebe que $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|$. Este resultado es conocido como la *desigualdad triangular* o *desigualdad de Minkowski.*

Ejercicio 2.

Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^3$, pruebe que $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = A$. Siendo $A = \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \sin\theta$, el área del paralelogramo definido por estos vectores, donde θ es el ángulo entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

Ejercicio 3.

Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, encuentre la esfera de mayor radio que puede ser contenida por el paralalepípedo que estos vectores forman.

Ejercicio 4.

Obtenga las expresiones del Jacobiano en coordenas polares, cilíndricas y esféricas. *Ayuda:* Cap. 6.3 de Marsden & Tromba, Cálculo Vectorial, 3ra Ed. 1991.

Ejercicio 5.

Utilice vectores para probar que la distancia en $\mathbb{R}^3$ entre un punto (x_0, y_0, z_0) y un plano dado por $ax + by + cz + d = 0$, es $|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, suponiendo que a, b y c no son todos cero.

Ejercicio 6.

Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, los cuales describen tres de las aristas de un paralelepípedo. Encuentre las relaciones entre estos vectores que determinan el mayor radio que puede tener una esfera, para ser contenida por el paralalepípedo.

Ejercicio 7.

Sea n un entero positivo. Sea D_n el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales y de grado n, con la suma de polinomios y la multiplicación de un polinomio por un escalar usuales. Muestre que D_n no es un espacio vectorial. ¿Qué condiciones de la definición fallan?

Ejercicio 8.

Los ángulos entre el vector $\boldsymbol{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$ y los ejes de coordenadas son θ_x, θ_y y θ_z. Los cosenos de estos ángulos se conocen como cosenos de dirección. Evalúe la dirección de los cosenos en términos de los componentes de $\boldsymbol{F}$. Demuestre que

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1.$$

Ejercicio 9.

Sea $\boldsymbol{F}(t) = \alpha[\cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j}]$ el vector posición de una partícula que se mueve en el plano xy.

a) Muestre que la velocidad angular, rapidez dividida por la distancia α desde el centro de la rayectoria circular, es ω.

b) Muestre que la aceleración $\boldsymbol{a}$ se dirige hacia el origen, con magnitud constante igual a $\alpha\omega^2$[*].

Ejercicio 10.

Cinemática del sólido rígido.

Se considera un sistema de barras que giran sin rozamiento, ver diagrama en Figura 1. Una barra AB de longitud $a = 10cm$ gira con velocidad angular $\omega = 12rad/s$ en sentido anti horario, respecto al punto A que se encuentra fijo. A esta barra está unida una barra BC de longitud $b = 15cm$, la cual gira libremente. Finalmente el otro extremo de la barra BC está unida a la barra CD de longitud $c = 20cm$ que posee su otro extremo fijo.

Mediante el empleo de un *script* resuelva los siguiente ítems en Octave:

1. Determinar la posición de los extremos de las barras en función del tiempo, grafique las trayectorias en el plano xy.
2. Graficar la posicion horizontal y vertical del punto C en funcion del tiempo.
3. Determinar numéricamente la velocidad del punto de unión C para cada instante de tiempo.
4. Realizar una animación para ver la cinemática de las barras. Muestre en la misma figura la posición de las barras y la velocidad horizontal y vertical del punto C en función del tiempo.

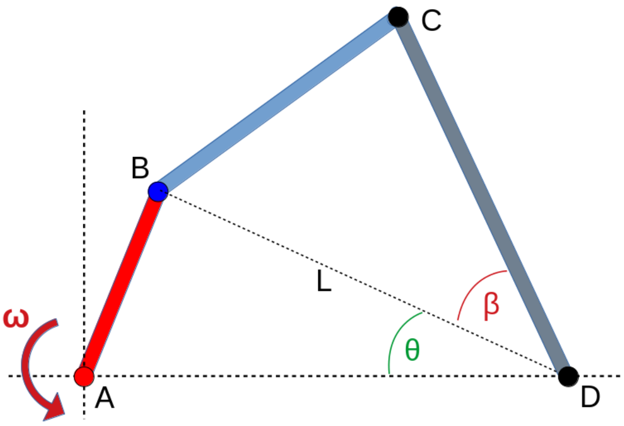

Figura 1: Esquema cinemática barras rígidas. Una barra AB de longitud $10cm$ gira con velocidad angular $\omega = 12rad/s$ respecto al punto A, que se encuentra fijo. A esta barra está unida una barra BC de longitud $15cm$, la cual gira libremente. La barra BC está unida a la barra CD, de longitud $20cm$, que posee su otro extremo fijo (punto D).

Ayuda: emplee el *script* TP0_Ej10_Cinematica_Barras.m subido a la web de la asignatura.

[*] Notar que ésta es la *aceleración centrípeta*. La fuerza centrípeta es $m\boldsymbol{a}$, y la *fuerza centrífuga* es $-m\boldsymbol{a}$, donde m es la masa de la partícula.